40 Lyhyt matematiikka

Sanna Hassinen
Timo Taskinen

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
1. painos, 2014

Tämä aineisto on digitaalinen
rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-2582-8

6 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2952-9

48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-2953-6

Toimitus: Vuokko Lipponen, Juho Niemelä
Ulkoasu: Sari Jeskanen
Taitto: Printable / Pirkko Pihlaja
Piirrokset: Marja Venäläinen
Kuvatoimitus: Nina Tuittu
Valokuvat:

s. 5 Kostiantyn Schastnyi / PantherMedia
s. 6 Elena Elisseeva / Mostphotos
s. 7 Krasimira Nevenova / Mostphotos
s. 9 Lev Dolgachov / Mostphotos
s. 11 Leung Cho Pan / PantherMedia
s. 18 Dmitry Morgan Photography / Mostphotos
s. 21 Olinchuk / Mostphotos
s. 22 Jiri Hera / Mostphotos
s. 27 Jacek Chabraszewski / PantherMedia
s. 28 Sebastian Duda / Mostphotos
s. 32 Mr. Smith Chetanachan / Mostphotos
s. 33 Dmitry Alexandrov / Mostphotos
s. 39 Alex Grichenko / Mostphotos
s. 41 payphoto / Mostphotos
s. 42 Eveliina Mustonen / Sanoma Pro Oy
s. 50 Katja Liukkonen / Sanoma Pro Oy
s. 52 Mihajlo Maricic / Mostphotos
s. 53 vas. Laurent Renault / Mostphotos
s. 53 oik. Tomi Setälä / Sanoma Pro Oy
s. 54 Eveliina Mustonen / Sanoma Pro Oy
s. 59 ylh. Sanoma Pro Oy
s. 59 alh. Simone Voigt / Mostphotos
s. 62 Kari Hirvo / Sanoma Pro Oy
s. 64 Achim Prill / Mostphotos
s. 65 Richard Semik / Mostphotos
s. 73 Gary Latham / Image Source / Corbis / Sanoma Pro Oy
s. 85 Sanoma Pro Oy
s. 90 vas. Eugene Sim / PantherMedia
s. 90 oik. Mostphotos
s. 113 Mostphotos
s. 120 Minttu Lehtovaara / Sanoma Pro Oy
s. 124 Reijo Nenonen / Vastavalo
s. 126 PantherMedia
s. 131 Nataliia Anisimova / Mostphotos
s. 137 Ruzanna Arutyunyan / Mostphotos
s. 138 Galyna Andrushko / Mostphotos
s. 140 Michele Constantini / Mostphotos
s. 142 Elena Elisseeva / Mostphotos
s. 143 Darryl Brooks / Mostphotos
s. 144 Nina Tuittu
s. 145 Marcel Maltzeff / Sanoma Pro Oy
s. 153 Wavebreakmedia ltd / PantherMedia
s. 154 PantherMedia
s. 156 Sanoma Pro Oy
s. 159 PantherMedia
s. 160 Sanoma Pro Oy
s. 161 Konstantin Kamenetskiy / Mostphotos
s. 171 Mia Saarinen / Sanoma Pro Oy
s. 175 Zdeněk Malý / PantherMedia
s. 177 tobkatrina / PantherMedia
s. 191 Julianna Olah / Mostphotos

© Sanna Hassinen, Timo Taskinen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

Esipuhe 4

I Kohti lyhyen matematiikan ylioppilaskoetta 5

Yleistä matematiikan ylioppilaskokeesta 6
Vinkkejä kokeeseen 7
Laskimen käyttö 8
Ohjeita harjoitteluun 9

II Lyhyen matematiikan osa-alueet 11

1 Lausekkeen sieventäminen 12
Käsitteitä 12
Murtolukujen laskutoimitukset 12
Prosentti 13
Potenssien laskusäännöt 13
Polynomi- ja murtolausekkeet 14

2 Ensimmäisen asteen yhtälöt ja epäyhtälöt 23
Ensimmäisen asteen yhtälö ja epäyhtälö 23
Verranto ja verrannollisuus 24
Prosenttiyhtälöt 24

3 Toisen asteen yhtälöt ja epäyhtälöt 34
Toisen asteen yhtälö 34
Toisen asteen polynomifunktio 34
Funktion nollakohdat 35
Toisen asteen epäyhtälö 35

4 Lineaarinen malli 43
Suoran yhtälö 43
Yhtälöpari 44

5 Epäyhtälöryhmät ja optimointi 55
Kahden muuttujan epäyhtälö 55
Epäyhtälöryhmän ratkaiseminen 56
Lineaarinen optimointi 56

6 Eksponentiaalinen malli 66
Potenssifunktio 66
Eksponenttifunktio 66
Potenssiyhtälö 67
Eksponenttiyhtälö 67

7 Lukujonot 78
Lukujono 78
Aritmeettinen jono 78
Geometrinen jono 79

8 Funktion analysoiminen 91
Derivaatta 91
Funktion kulku 92
Ääriarvo ja ääriarvokohdat 93

9 Tasogeometriaa – monikulmiot 106
Kulmia 106
Yhdenmuotoisuus 106
Kolmiot 107
Nelikulmiot 108

10 Ympyrä 121
Kehän pituus ja ympyrän ala 121
Sektori ja segmentti 121
Ympyrän tangentti 122

11 Avaruusgeometria 132
Lieriö 132
Kartio 133
Pallo 134
Tilavuuksien suhde 134

12 Tilastot 146
Muuttujat ja jakaumat 146
Kuvaajat 147
Tunnusluvut ja normittaminen 148

13 Todennäköisyyslaskenta 162
Klassinen todennäköisyys 162
Tuloperiaate ja kombinaatiot 162
Todennäköisyyden laskusääntöjä 163
Normaalijakauma 163

III Monivalintatehtäviä ja harjoituskokeita 177

Monivalintatehtäviä 178
Harjoituskoe 1 190
Harjoituskoe 2 193

Vastaukset 197 · Hakemisto 205

Esipuhe

YO Lyhyt matematiikka kertaa lukion lyhyen matematiikan pakollisten kurssien (kurssit 1–6) tärkeimmät asiat. Kirja soveltuu erityisen hyvin ylioppilaskokeeseen ja erilaisiin pääsykokeisiin valmentautumiseen.

Kirjan tehtävissä on huomioitu se, että lyhyen matematiikan ylioppilaskoe on keväästä 2016 alkaen kaksiosainen: osassa tehtävistä saa käyttää laskinta apuna, osassa ei.

Kirjassa on kolme osaa:

- **Osassa I** on yleistietoa lyhyen matematiikan ylioppilaskokeesta.
- **Osa II** on jaettu lukuihin 1–13 aiheiden mukaisesti. Jokaisessa luvussa noudatetaan järjestystä teoria, esimerkit, tehtävät. Tehtävät on jaettu ilman laskinta ratkaistaviin ja laskimen kanssa ratkaistaviin.
- **Osassa III** on 100 monivalintatehtävää, jotka ratkaistaan ilman laskinta. Lisäksi on kaksi harjoituskoetta, jotka on jaettu osiin A, B1 ja B2 samaan tapaan kuin ylioppilaskoe keväästä 2016 alkaen.

Esimerkeissä laskinlogo tai kertoo, onko esimerkki ratkaistu laskinta käyttäen vai ilman laskinta. Laskinesimerkeissä on lisäksi merkitty harmaalla pohjavärillä ne ratkaisun välivaiheet, jotka voi sivuuttaa kokonaan, jos käytössä on symbolinen laskin.

Kirjan lopussa on tehtävien vastaukset. Myös täydelliset malliratkaisut kaikkiin kirjan tehtäviin ovat saatavilla; katso ohjeet niiden hankkimiseksi Sanoma Pron verkkosivuilta (www.sanomapro.fi). Kirjan digitaalinen versio sisältää malliratkaisut.

Onnea ja menestystä kokeisiin!

Helsingissä syyskuussa 2014

Tekijät

I Kohti lyhyen matematiikan ylioppilaskoetta

Yleistä matematiikan ylioppilaskokeesta

Matematiikan ylioppilaskoe uudistuu vuonna 2016. Uudessa kokeessa on 13 tehtävää, joista opiskelija voi valita enintään 10. Kokeessa on kolme osiota seuraavan taulukon mukaisesti.

Osio	Tehtäviä	Kuinka monta tehtävää valitaan?	Apuvälineet
A	4	4	ilman laskinta
B1	5	3	laskimen kanssa
B2	4	3	laskimen kanssa

Kokeen alussa opiskelija saa kaikki koetehtävät. Laskimen saa kuitenkin ottaa käyttöön vasta sen jälkeen, kun A-osion tehtävät on palautettu. Taulukkokirjaa saa käyttää koko kokeen ajan.

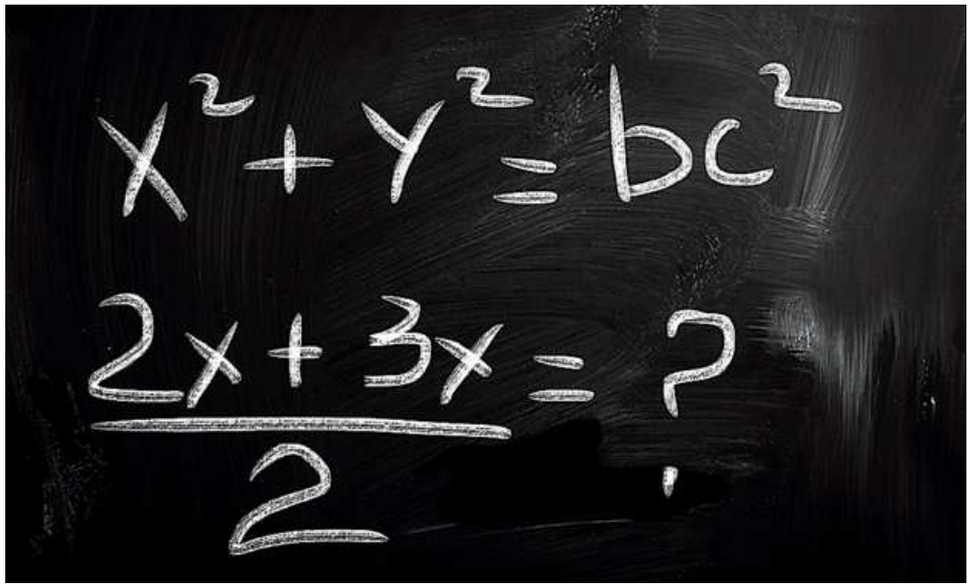
Kokeen kokonaispituus on kuusi tuntia. Opiskelija voi käyttää A-osion tehtäviin korkeintaan kolme tuntia. Osiossa A on mukana helppoja perustehtäviä, mutta osa tehtävistä voi olla vaativia – kuitenkin esimerkiksi lukuarvojen on oltava sellaisia, että laskutoimituksista selviää ilman laskinta.

B-osioiden tehtäviä voi ratkaista missä tahansa vaiheessa ilman laskinta. Kahta eri B-osiota erottaa tehtävien vaativuustaso. B2-osion tehtävät ovat vaativampia kuin B1-osion tehtävät. Molemmissa osioissa voi olla mukana tehtäviä syventävistä kursseista. Kokeen enimmäispistemäärän (60 pistettä) voi kuitenkin saada ilman syventävien kurssien tehtäviä. Kokeen kaikki tehtävät ovat kuuden pisteen arvoisia.

Vinkkejä kokeeseen

Kun vastaat koekysymyksiin, muista, että hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut perustelut ja lopputulos.

- Lue ensin tehtävät huolella läpi. Tee koepaperiin tai suttupaperiin huomioita tehtävistä.
- Aloita siitä tehtävästä, joka tuntuu omasta mielestäsi helpoimmalta. Muista, että A-osio on palautettava ennen kuin laskimen saa käyttöön.
- Kokoa huolellisesti tehtävänannossa annetut tiedot paperille.
- Ole tarkka murtolukujen ja lausekkeiden sieventämisten kanssa.
- Mieti, millä keinoilla tehtävä voisi ratketa. Muista aina kirjoittaa näkyviin käyttämäsi yhtälöt, epäyhtälöt ja lausekkeet.
- Kirjoita ratkaisusi selkeästi:
  - Kirjoita laskut allekkain.
  - Sanallisissa tehtävissä kirjoita näkyviin muuttujille selitykset.
  - Kerro lyhyesti, mitä milloinkin teet.
- Jos ratkaisuideasi ei toimi, kokeile jotain muuta. Apuna voit käyttää esimerkiksi
  - taulukoita
  - kaavioita
  - kuvioita.
- Muista tarkistaa ratkaisusi. Esimerkiksi yhtälöt on helppo tarkistaa sijoittamalla. Jotta tarkistaminen ei unohdu, merkitse esimerkiksi koepaperiin ne tehtävät, jotka kaipaavat vielä lopuksi tarkistamista.
- Mieti vastauksesi järkevyyttä.
- Kokoa tehtävän vastaukset loppuun. Tarkista samalla, että olet vastannut siihen, mitä kysytään.



Laskimen käyttö

- Käytä kokeessa laskinta, jota olet tottunut käyttämään. Symbolinen laskin ei helpota tehtävien ratkaisemista, jos sitä ei osaa käyttää.
- Muista erityisesti laskintehtävissä kirjoittaa ratkaisusi näkyviin niin, että paperilla näkyvät kaikki tarvittavat vaiheet. Esimerkiksi yhtälöitä ratkaistaessa vastauspaperista pitää vastauksen lisäksi löytyä aina myös yhtälö, jota on ratkaistu.
- Muista tarkistaa laskimesi asetukset. Trigonometristen funktioiden kohdalla on tärkeää tarkistaa, että laskimen asetuksista on valittu oikea kulman yksikkö.
- Seuraavaan on listattu symbolisten laskinten toimintoja, jotka ainakin olisi syytä osata. Näiden lisäksi on tietysti paljon laskintoimintoja, jotka helpottavat ja nopeuttavat tehtävien käsittelyä.

Perustoiminnot

- lausekkeiden syöttäminen (potenssit, juuret, murtoluvut)
- lausekkeen sieventäminen
- likiarvon määrittäminen
- lausekkeiden kopiointi ja liittäminen sekä laskimen muistin käyttö

Yhtälöt ja funktiot

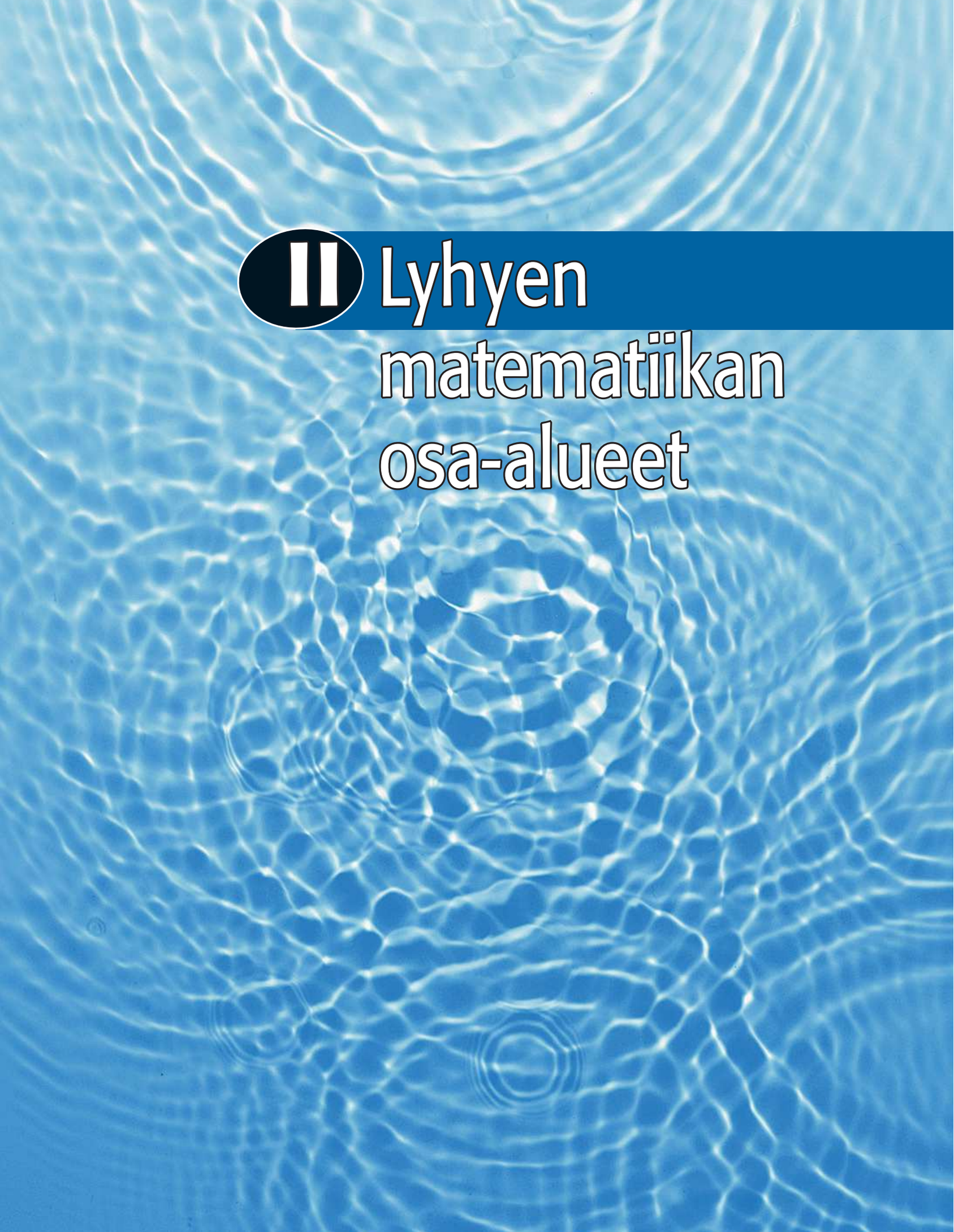
- yhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen
- yhtälöparin ratkaiseminen
- funktion derivoiminen
- funktion kuvaajan piirtäminen (kuvaaja-asetusten muuttaminen niin, että haluttu kuvaaja saadaan näkyviin)
- epäyhtälöryhmien piirtäminen
- trigonometristen funktioiden käsittely (yhtälöt ja kuvaajat)

Tilastot ja todennäköisyys

- tunnuslukujen määrittäminen tilastoaineistoille
- lukumäärien laskeminen (kertoma, kombinaatio)
- todennäköisyysjakaumien käyttö

Ohjeita harjoitteluun

- Muista, että säännöllinen harjoittelu tuo parhaat tulokset. Myös laskimen käyttöä tulee harjoitella niin, että koetilanteessakin osaa laskintaan varmasti käyttää.
- Jos kertauskirjan tehtävät tuntuvat vaikeilta, tee muista kurssikirjoista helpompia tehtäviä. Tärkeää on, että lasket.
- Palaa niihin tehtäviin, joita et ole osannut. Tee niitä uudelleen.
- Jos et osaa kirjan tehtäviä, katso mallia ratkaisuista ja **tee tehtävä uudelleen**. Tee tehtävä niin monta kertaa, että osaat sen katsomatta mallia.
- Älä laske liian montaa tuntia kerralla. Usein asiaan jaksaa keskittyä kunnolla 2–3 tuntia. Pidä sen jälkeen tauko ja lue vaikka jotain muuta ainetta. Laske ennemmin monena päivänä vähän kuin yhtenä päivänä paljon.
- Tee lukulomalle **kunnollinen** lukusuunnitelma.
  - Merkitse ensin lukusuunnitelmaan, minä päivinä osallistut kirjoituksiin.
  - Merkitse päivät ja ajankohdat, joina et pysty opiskelemaan.
  - Kirjoita lukusuunnitelmaan, minä päivänä luet mitäkin ainetta.
  - Mieti, mitä asioita kertaat milloinkin.



II Lyhyen matematiikan osa-alueet

1 Lausekkeen sieventäminen

Käsitteitä

- **Alkuluku** on kokonaisluku (>1), joka voidaan kirjoittaa vain itsensä ja luvun 1 tulona.
- Luvun a **vastaluku** on $-a$. Vastalukujen summa on nolla.

$$a + (-a) = 0$$

- Luvun a **itseisarvo** on sen etäisyys nollasta. Itseisarvo merkitään $|a|$.
- Luvun a ($a \neq 0$) **käänteisluku** on $\frac{1}{a}$. Luvun ja sen käänteisluvun tulo on 1.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

- Luvun a **neliöjuuri** $\sqrt{a}$ on se ei-negatiivinen luku, jolle $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Murtolukujen laskutoimitukset

- Murtoluvut ovat **samannimiset**, jos niillä on sama nimittäjä.
- Samannimiset murtoluvut voidaan **laskea yhteen** kaavalla

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$$

- Murtolukujen **kertolaskussa** osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään.

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

- Murtolukujen **jakolasku** muutetaan kertolaskuksi siten, että jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$$

Prosentti

- **Prosentti** merkitsee sadasosaa eli $1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$.
- Luvun a **osuus prosentteina** luvusta b on $\frac{a}{b} \cdot 100\,\%$.
- **Prosenttiosuus** perusarvosta a eli p % luvusta a on $\frac{p}{100} \cdot a$.
- Kun suure a kasvaa tai pienenee p %, muuttunut arvo voidaan laskea kertomalla a **prosenttikertoimella** $\frac{100 \pm p}{100}$.

Potenssien laskusäännöt

- Potenssin määritelmä: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,\text{kpl}} = a^n$.
- Potenssimerkinnässä a^n **kantalukuna** on a ja **eksponenttina** n.
- Potenssit ovat **samankantaiset**, jos niillä on sama kantaluku.
- Potenssilausekkeita voidaan sieventää potenssikaavojen avulla.

Samankantaisten potenssien tulo	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Samankantaisten potenssien osamäärä	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$
Tulon potenssi	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$
Osamäärän potenssi	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$
Potenssin potenssi	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Negatiivinen eksponentti	$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,\ a \neq 0,\ b \neq 0$
Nollas potenssi	$a^0 = 1,\ a \neq 0$

Polynomi- ja murtolausekkeet

- Lukua tai numeroiden ja kirjaimien avulla merkittyä laskutoimitusta sanotaan **lausekkeeksi**.
- Lausekkeen **sieventäminen** tarkoittaa mahdollisten sulkujen poistamista ja kaikkien mahdollisten lausekkeen laskutoimitusten suorittamista.
- Kirjaimia sisältävän **lausekkeen arvo** lasketaan sijoittamalla kirjaimen paikalle haluttu luku.
- Lausekkeessa esiintyvät yhteenlaskettavat ovat **termejä**. Termillä voi olla **kerroin** ja **kirjainosa**.
- Kaksi termiä on **samanmuotoisia**, jos niillä on sama kirjainosa.
- Samanmuotoiset termit voidaan yhdistää käyttämällä **osittelulakia**.

$$ax \pm bx = (a \pm b)x$$

- Jos (polynomi)lauseke on sulkujen sisällä ja sulkujen edessä on miinusmerkki, sulut poistetaan vaihtamalla kaikkien suluissa olevien termien etumerkit. Plusmerkki sulkujen edessä ei muuta mitään etumerkkejä.

$$-(+a) = -a \qquad -(-a) = +a$$
$$+(+a) = +a \qquad +(-a) = -a$$

- Polynomit voidaan **kertoa keskenään** kertolaskun osittelulakia käyttäen.

$$a(b+c) = ab + ac \qquad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

- **Murtolausekkeessa** muuttujakirjain voi olla myös nimittäjässä.
- Murtolausekkeita voidaan laskea yhteen, kertoa ja jakaa käyttäen hyväksi murtolukujen laskulakeja.
- Murtolausekkeita voi sieventää **supistamalla** mahdollinen yhteinen tekijä.

$$\frac{ax \pm bx}{cx} = \frac{\cancel{x}(a \pm b)}{c\cancel{x}} = \frac{a \pm b}{c}$$

Esimerkki 1

Sievennä lauseke potenssikaavojen avulla ja laske lausekkeen arvo, kun $a = 8$ ja $b = -2$.

a) $\dfrac{ab^3 \cdot a^3b^2}{a^2b^4}$ **b)** $(2ab)^2 \cdot (a^2b^4)^{-0{,}5}$

Ratkaisu

a) $\dfrac{ab^3 \cdot a^3b^2}{a^2b^4} = \dfrac{a^{1+3}b^{3+2}}{a^2b^4} = \dfrac{a^4b^5}{a^2b^4} = a^{4-2}b^{5-4} = a^2b$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Kun kirjainten a ja b paikalle sijoitetaan $a = 8$ ja $b = -2$, saadaan

$8^2 \cdot (-2) = 64 \cdot (-2) = -128.$

b) $(2ab)^2 \cdot \left(a^2b^4\right)^{-0{,}5} = 2^2a^2b^2 \cdot a^{2 \cdot (-0{,}5)}b^{4 \cdot (-0{,}5)}$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$

$= 4a^2b^2 \cdot a^{-1}b^{-2}$

$= 4a^{2-1}b^{2-2}$

$= 4ab^0$

$= 4a$

$a^0 = 1$

Sijoittamalla $a = 8$ saadaan $4 \cdot 8 = 32$.

Vastaus **a)** -128 **b)** 32

Esimerkki 2

Sievennä polynomi $P(x) = (3x - 2)^2 - 3x(3x - 1)$ ja laske $P\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

Ratkaisu Merkitään potenssi kertolaskuna ja käytetään osittelulakeja kertolaskujen suorittamiseen.

$a(b + c) = ab + ac$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$P(x) = (3x-2)^2 - 3x(3x-1)$

$= (3x-2)(3x-2) - 3x(3x-1)$

$= 9x^2 - 6x - 6x + 4 - 9x^2 + 3x$

$= -9x + 4$

Sijoittamalla $x = \dfrac{2}{3}$ saadaan $P\left(\dfrac{2}{3}\right) = -9 \cdot \dfrac{2}{3} + 4 = -3 \cdot 2 + 4 = -2.$

Vastaus $P\left(\dfrac{2}{3}\right) = -2$

Esimerkki 3

Sievennä lausekkeet.

a) $\dfrac{4x+x^2}{3x}$ **b)** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2+2x}{x^2}$

Ratkaisu

a)
$$\frac{4x+x^2}{3x}$$
$$=\frac{x(4+x)}{3x}$$
$$=\frac{4+x}{3}$$

b)
$$\frac{1}{x}-\frac{x^2+2x}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{x(x+2)}{x\cdot x}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{(x+2)}{x}$$
$$=\frac{1-(x+2)}{x}$$
$$=\frac{1-x-2}{x}$$
$$=\frac{-x-1}{x}$$

Vastaus

a) $\dfrac{4+x}{3}$ **b)** $\dfrac{-x-1}{x}$

Esimerkki 4

Laske lausekkeen $\dfrac{4x-2y}{x+2y}$ arvo, kun $x=\dfrac{1}{3}$ ja $y=\dfrac{3}{4}$.

Ratkaisu Lauseketta ei voi sieventää, koska osoittajasta eikä nimittäjästä voi erottaa yhteisiä tekijöitä. Sijoitetaan annetut muuttujien arvot lausekkeeseen.

$$\frac{4\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}+2\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\overset{2)}{\frac{4}{3}}-\overset{3)}{\frac{3}{2}}}{\underset{2)}{\frac{1}{3}}+\underset{3)}{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{8}{6}-\frac{9}{6}}{\frac{2}{6}+\frac{9}{6}}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{11}{6}}=-\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{6}}{11}=-\frac{1}{11}$$

Vastaus $-\dfrac{1}{11}$

Esimerkki 5

Valon nopeus on 299 792 458 metriä sekunnissa.

a) Ilmoita valon nopeus kilometreinä tunnissa. Anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Auringon keskietäisyys maasta on noin $1{,}4960 \cdot 10^8$ km. Kuinka kauan (sekunnin tarkkuudella) valonsäteeltä kestää matka Auringosta Maan pinnalle?

c) Avaruusraketin nopeus on 40 000 km/h. Kuinka monta vuorokautta raketin matka Aurinkoon kestäisi?

Ratkaisu

a) Koska $1\text{ km} = 1\,000\text{ m}$, $1\text{ m} = \frac{1}{1000}\text{ km}$

Yksi tunti sekunteina on $60 \cdot 60\text{ s} = 3\,600\text{ s}$, joten $1\text{ s} = \frac{1}{3600}\text{ h}$.

$$\text{Tällöin } 299\,792\,458\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 299\,792\,458\ \frac{\frac{1}{1000}\text{km}}{\frac{1}{3600}\text{h}}$$

$$= 299\,792\,458 \cdot 3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$= 1{,}079252\ldots \cdot 10^9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\approx 1{,}08 \cdot 10^9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$v = \frac{s}{t}$ eli $t = \frac{s}{v}$

b) Aika saadaan jakamalla matka nopeudella:

$$\frac{1{,}4960 \cdot 10^8\text{ km}}{1{,}079252\ldots \cdot 10^9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}1386\ldots\text{ h} = 8{,}316\ldots\text{ min} \approx 8\text{ min } 19\text{ s}$$

$0{,}316\ldots\text{ min} = 0{,}316\ldots \cdot 60\text{ s} \approx 19\text{ s}$

c) Raketin matka kestäisi

$$\frac{1{,}4960 \cdot 10^8\text{ km}}{40000\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 3740\text{h} = 155{,}833\ldots\text{d} \approx 156\text{d}.$$

Vastaus

a) $1{,}08 \cdot 10^9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ **b)** 8 min 19 s **c)** 156 d

Esimerkki 6

Pyöräilijä ajaa Helsingistä Lahden suuntaan nopeudella a (km/h) käyttäen matkaan b tuntia. Seuraavana päivänä hän ajaa samaan suuntaan. Pyöräilijän nostaa nopeutta 25 % ja lyhentää pyöräilyaikaa 10 %. Kuinka muuttuu pyöräillyn matkan pituus?

Ratkaisu

Jos nopeus kasvaa 25 %, uusi nopeus voidaan laskea prosenttikertoimen avulla:

$$100\ \% + 25\ \% = 125\ \% = 1{,}25$$

Uusi nopeus on siis $1{,}25a$.

Jos aikaa lyhennetään 10 %, uusi matka-aika lasketaan prosenttikertoimella

$$100\ \% - 10\ \% = 90\ \% = 0{,}9.$$

Uusi matka-aika on $0{,}9b$.

Koska $\text{nopeus} = \dfrac{\text{matka}}{\text{aika}}$, $\text{matka} = \text{nopeus} \cdot \text{aika}$.

Ensimmäisenä päivänä matkan pituus on siis ab.
Toisena päivänä matkan pituus on $1{,}25a \cdot 0{,}9b = 1{,}125ab$.

Matkan pituus muuttuu $1{,}125ab - 1ab = 0{,}125ab$ eli se kasvaa

$$0{,}125 = 12{,}5\ \%.$$

Vastaus

Matkan pituus kasvaa 12,5 %.

Esimerkki 7

Heikin Kone myy tietokoneita ja puhelimia. Pieniä tablettitietokoneita myydään keskimäärin saman verran joka viikko normaalihinnalla.

a) Suomessa tietokoneista maksetaan valtiolle 23 % arvonlisäveroa. Vero lasketaan tuotteen verottomasta hinnasta. Kuinka monta prosenttia asiakkaan maksamasta hinnasta on veroa?

b) Kauppias laskee koneen hintaa 18 %. Tällöin viikon kappalemääräinen myynti lisääntyy 15 %. Miten muuttuvat kauppiaan viikon myyntitulot?

Ratkaisu

a) Merkitään koneen verotonta hintaa kirjaimella k. Verollinen hinta saadaan prosenttikertoimella

$$100\,\% + 23\,\% = 123\,\% = 1{,}23$$

Verollinen hinta on siis $1{,}23k$.

Veroa maksetaan $0{,}23k$. Verrataan tätä asiakkaan maksamaan hintaan:

$$\frac{0{,}23k}{1{,}23k} = 0{,}1869... \approx 19\,\%$$

b) Merkitään tuotteen hintaa kirjaimella a ja viikon kappalemääräistä myyntiä kirjaimella b.

Kun hinta laskee 18 %, laskua kuvaava prosenttikerroin on

$$100\,\% - 18\,\% = 82\,\% = 0{,}82.$$

Alennettu hinta on siis $0{,}82a$.

Myynnin kasvua kuvaava prosenttikerroin on

$$100\,\% + 15\,\% = 115\,\% = 1{,}15.$$

Kasvanut myynti on $1{,}15b$.

Kauppiaan myyntitulot ennen muutoksia ovat ab.
Uudet tulot ovat $0{,}82a \cdot 1{,}15b = 0{,}943ab$
Myyntitulot laskevat $1 - 0{,}943 = 0{,}057 = 5{,}7\,\%$.

Vastaus

a) 19 %

b) Tulot laskevat 5,7 %.

Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

1 Sievennä lausekkeita.

a) $x^3 \cdot x \cdot x^4$ **b)** $2a^5 \cdot 5a^8$

c) $(a^2)^6$ **d)** $((x^5)^2)^3$

2 Sievennä lausekkeita potenssikaavojen avulla.

a) $\dfrac{a^7}{a^3}$ **b)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

c) $(2a^2)^{-3}$ **d)** $\left(\dfrac{4}{x^5}\right)^{-2}$

3 Sievennä lauseke $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(ab)^{\frac{1}{2}}$. [S2011, 2c]

4 Sievennä $4^0 - 3^{-1} + 2^{-2} - 1^{-3}$. Anna vastaus murtolukuna. [K2010, 2c]

5 Sievennä polynomit.

a) $2x - (2 - 5x) + (3 - 4x)$

b) $(x - 2)(4x - 3)$

c) $(3a - 2)^2$

6 Sievennä lauseke $5a^2 - (2a)^2$. [S2009, 2b]

7 Muodosta polynomien $-x^2 + 2x$ ja $2x^2 - 3x + 1$ summa ja tulo. [K2009, 1a]

8 Sievennä lauseke ja laske sen arvo, kun $x = -1$.

a) $-4x(1 - x) - (2x + 1)^2$

b) $2 - (-x - 2) - (x - 1)(x - 2)$

9 Sievennä lauseke $\left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + 2\sqrt{x}$. [K2011, 2b]

10 Laske.

a) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{12}$ **b)** $\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3} : \dfrac{3}{4}\right) - \dfrac{1}{3}$

11 Laske lukujen $\dfrac{3}{4}$ ja $\dfrac{6}{5}$ käänteislukujen keskiarvo.

12 Sievennä lauseke $(5 + x^2) - (4x^2 + x)$ ja laske sen arvo, kun $x = -2$. [S2009, 1b]

13 Sievennä lauseke $x^2 + x - (x^2 - x)$ ja laske sen arvo, kun $x = \dfrac{1}{2}$. [K2011, 1b]

14 Laske $|x - y|$, kun $x = 2$ ja $y = 5$. [K2011, 2c]

15 Laske lausekkeen $a(b - 2) + (a - b)^2 - b(1 - a)$ arvo, kun $a = 2$ ja $b = -2$. [S2013, 1c]

16 Sievennä lausekkeet.

a) $\dfrac{10x^3 - 5x^2}{5x}$ **b)** $\dfrac{2a}{4a + 8a^2}$

17 Sievennä lauseke $\dfrac{3a - 6a^2}{3a}$. [K2013, 1c]

18 Sievennä lauseke.

a) $\dfrac{x^2}{3x} + \dfrac{2(1 - x)}{6}$ **b)** $\dfrac{(x + 2)(x - 2)}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7}$ [K2006, 2]

19 Sievennä lauseke $\dfrac{5x + 3y}{3} + \dfrac{x - 6y}{2}$. [S2008, 1c]

20 Sievennä lauseke $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1}$. [S2007, 1c]

21 Laske lausekkeen $\dfrac{-x - 2y}{2x - y}$ arvo, kun $x = -2$ ja $y = 2$.

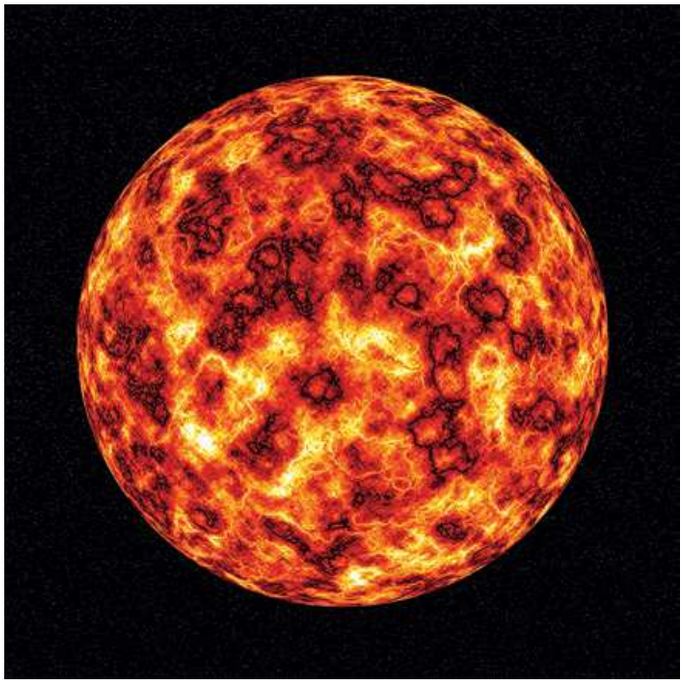
22 Laske lausekkeen $\frac{2a+3b}{a-b}$ arvo, kun $a=\frac{5}{2}$ ja $b=\frac{7}{3}$. [K2012, 1b]

23 Laske lausekkeen $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ arvo, kun $x=3$. [S2011, 1a]

24 Laske lausekkeen $\frac{2x-1}{x+1}$ arvo, kun $x=\frac{5}{8}$. [K2009, 2c]

25 Mikä on lausekkeen $\frac{3x-1}{x+1}$ arvo, kun $x=\frac{4}{7}$? [S2010, 1c]

26 Mikä on lausekkeen $\frac{a(a-1)}{x}+ax$ arvo, kun $x=a-1$?[K2007, 1c]



Tehtäviä laskimen kanssa

27 Alpo, Sanna ja Pauli palaavat samalla taksilla ylioppilasjuhlista. Alpon jäädessä pois mittari näyttää 21,90 €, Sannan jäädessä 28,20 € ja matkan loppusumma on 33,50 €. Matkan hinta päätetään jakaa seuraavalla tavalla: Alpo maksaa kolmasosan matkan alkuosuuden hinnasta. Sanna maksaa kolmasosan alkuosuudesta ja puolet keskiosuuden hinnasta. Laskun loppuosa jää Paulille. Kuinka paljon kukin joutuu maksamaan? [K2013, 4]

28 Vuonna 2009 maapallon 12 suurinta riisintuottajaa tuottivat yhteensä 608 miljoonaa tonnia riisiä. Kuinka monta kilogrammaa tämä on henkilöä kohti, kun väkiluku vuonna 2009 oli noin 6,8 miljardia?

29 Auringon massa on $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg ja putoamiskiihtyvyys Auringon pinnalla on 274 m/s^2.

a) Kuinka moninkertainen Auringon massa on Maan massaan, $5{,}9737 \cdot 10^{24}$ kg, verrattuna?

b) Maan putoamiskiihtyvyys on 9,81 m/s^2. Kuinka monta prosenttia suurempi putoamiskiihtyvyys on Auringossa verrattuna Maan arvoon?

30 Sähkön kokonaistuotanto vuonna 2012 oli 70 394 gigawattituntia (GWh).

a) Jos tämä sähkömäärä jaettaisiin tasan suomalaisten kesken, kuinka paljon kukin vuodessa sähköä käyttäisi kilowattitunteina (kWh)? Suomen väkiluku vuonna 2012 oli 5 426 674.

b) Jos sähkön hinta olisi 30 senttiä kilowattitunnilta, kuinka paljon vuoden aikana tuotettu sähkö maksaisi?

31 Erään japanilaisen auton keskikulutus maantieajossa on 6,8 litraa bensiiniä sadalla kilometrillä. Saman kokoluokan amerikkalaisella autolla voi ajaa 32 mailia yhdellä gallonalla bensiiniä. Kumpi auto kuluttaa vähemmän polttoainetta? Yksi gallona on noin 3,785 litraa, ja yksi maili noin 1,609 kilometriä. [S2012, 6]

32 Aurinkokuntaamme lähin tähti, Proxima Centauri, sijaitsee noin 4,22 valovuoden päässä Maasta.

a) Laske etäisyys kilometreinä, kun valon nopeus on 300 000 km sekunnissa.

b) Tähtitieteessä matkan yksikkönä voidaan käyttää myös parallaksisekuntia eli parsekia (pc). Yksi parsek on $3{,}086 \cdot 10^{16}$ metriä. Kuinka monta valovuotta on yksi parsec?

33 Lukua a suurennetaan kolme kertaa peräkkäin 10 %. Kuinka monta prosenttia suurempi saatu luku on verrattuna alkuperäiseen lukuun a?

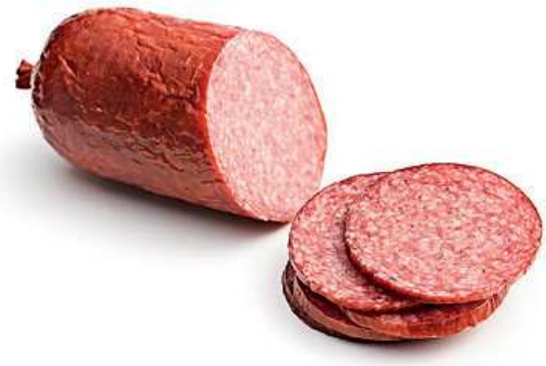
34 Suomen sähkönkulutus vuonna 2005 oli 84,9 TWh (terawattituntia). Tästä katettiin omalla ydinvoimalla 26,3 %, muilla kotimaisilla energialähteillä 53,7 % ja tuontisähköllä loput. Olkiluodon uusi ydinvoimala lisää sähköntuotantoa 14 TWh:lla vuonna 2009. Oletetaan, että sähkönkulutus on tällöin noussut vuoden 2005 tasosta 12 %, muita muutoksia kotimaisessa energiantuotannossa ei ole tapahtunut ja tuonnilla katetaan edelleen kotimaisen tuotannon ylittävä osuus. Mikä on tällöin kotimaisen ydinvoiman ja mikä tuontisähkön suhteellinen osuus kokonaiskulutuksesta? [S2007, 3]

35 Hintaa korotetaan ensin 45 prosenttia ja sen jälkeen 62 prosenttia. Näytä, että tulos on sama, jos tuotteen hintaa korotetaan ensin 62 prosenttia ja sitten 45 prosenttia. Kuinka monen prosentin nousua tuotteen hinnassa korotukset yhteensä merkitsevät? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella. [S2010, 5]

36 Positiivinen luku a kasvaa 20% ja pienenee tämän jälkeen 17 %. Onko tulos suurempi vai pienempi kuin alkuperäinen luku a? Kuinka monta prosenttia alkuperäisestä luvusta muutos on? [K2011, 3b]

37 Jos tuotteen hinta on a, sitä myydään viikossa b kappaletta. Jos hintaa lasketaan 20 %, viikon kappalemääräinen myynti kasvaa 40 %. Miten muuttuu viikon myyntitulo?

38 Mikä on meetvurstin suolapitoisuus prosentin kymmenesosan tarkkuudella, kun 250 grammassa meetvurstia on 9,0 grammaa suolaa? [S2012, 2a]



39 Tiheys määritellään massan ja tilavuuden suhteena. Kuinka muuttuu kappaleen tiheys, jos sen massa pienenee 25 %, mutta tilavuus kasvaa 20 %?

2 Ensimmäisen asteen yhtälöt ja epäyhtälöt

Ensimmäisen asteen yhtälö ja epäyhtälö

- **Ensimmäisen asteen yhtälö** voidaan sieventää muotoon $ax + b = 0$ ($a \neq 0$).

- Ensimmäisen asteen yhtälössä **murtolukukertoimet** ja **nimittäjät** kannattaa yleensä poistaa ennen yhtälön varsinaista ratkaisemista.
  1. Kirjoitetaan kaikki termit murtolukumuodossa. Jos termissä ei ole nimittäjää, nimittäjäksi merkitään luku 1.
  2. Lavennetaan kaikki termit samannimisiksi.
  3. Yhtälön molemmat puolet kerrotaan yhteisellä nimittäjällä.

- Yhtälöitä ratkaistaessa
  - yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä sama luku
  - molemmat puolet voidaan kertoa tai jakaa samalla luvulla.

- **Yhtälön ratkaisun vaiheet:**
  1. Poistetaan nimittäjät.
  2. Poistetaan sulut.
  3. Ratkaistavaa kirjainta sisältävät termit siirretään yhtälön vasemmalle ja vakiot yhtälön oikealle puolelle.
  4. Yhdistetään samanmuotoiset termit.
  5. Jaetaan ratkaistavan kirjaimen kertoimella.

- **Identtisissä yhtälöissä** muuttujatermit häviävät yhtälöä sievennettäessä kokonaan. Jos yhtälö sievenee muotoon
  - $0 = 0$, yhtälön ratkaisuna on kaikki reaaliluvut.
  - $0 = c$, missä $c \neq 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

- **Epäyhtälössä** yhtäsuuruusmerkki on korvattu epäyhtälömerkillä ($<$, $>$, $\leq$ tai $\geq$).

- Ensimmäisen asteen epäyhtälöt ratkaistaan samalla tavalla kuin ensimmäisen asteen yhtälöt.
  - Epäyhtälön ratkaisussa tulee muistaa, että negatiivisella luvulla jaettaessa tai kerrottaessa **epäyhtälömerkin suunta vaihtuu**.

Verranto ja verrannollisuus

- Kun kaksi osamäärää (suhdetta) merkitään yhtä suuriksi, saadaan **verranto**.
  Verranto ratkaistaan **ristiinkertomalla**.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
$$ad=bc$$

- Suureet ovat **suoraan verrannolliset**, jos toisen suureen kasvaessa toinen kasvaa samassa suhteessa. Suoraan verrannollisille suureille muodostetaan verranto merkitsemällä suhteet yhtä suuriksi.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$$

- Suureet ovat **kääntäen verrannolliset**, jos toisen suureen kasvaessa toinen pienenee samassa suhteessa. Kääntäen verrannollisille suureille verrantoa muodostettaessa toinen suhteista käännetään.

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_2}{y_1}$$

Prosenttiyhtälöt

- Prosenttiyhtälöissä olennaista on osata käyttää **prosenttikerrointa** yhtälöiden muodostamisessa ja vastausten tulkitsemisessa.

- Prosenttiyhtälöt perustuvat seuraavaan perustilanteeseen: Tietty prosenttiosuus p % perusarvosta a saadaan kertomalla perusarvo prosenttikertoimella $\frac{p}{100}$ eli

$$\frac{p}{100}\cdot a=b.$$

- Jos tilanteeseen liittyy **useampia muuttuvia suureita**, kannattaa tilannetta tarkastella esimerkiksi taulukon avulla.

Esimerkki 1

Ratkaise yhtälö.

a) $-3x-(2-4x)=5(x+2)$

b) $3x-\frac{2x}{3}=1-\frac{2x-3}{2}$

Ratkaisu

a) Poistetaan ensin sulut ja sievennetään yhdistämällä samanmuotoisia termejä.

Sulkujen edessä oleva miinusmerkki vaihtaa kaikkien sulkujen sisällä olevien termien etumerkit.

$$\begin{aligned}
-3x-(2-4x)&=5(x+2)\\
-3x-2+4x&=5x+10\\
-3x+4x-5x&=10+2\\
-4x&=12 \qquad |:(-4)\\
x&=-3
\end{aligned}$$

b) Kirjoitetaan kaikki termit murtolukumuodossa ja lavennetaan termit samannimisiksi.

$$\begin{aligned}
&{}^{6)}\frac{3x}{1}-{}^{2)}\frac{2x}{3}={}^{6)}\frac{1}{1}-{}^{3)}\frac{2x-3}{2}\\
&\frac{18x}{6}-\frac{4x}{6}=\frac{6}{6}-\frac{6x-9}{6}
\end{aligned}$$

Poistetaan nimittäjät kertomalla yhteisellä nimittäjällä ja ratkaistaan yhtälöstä x.

Merkkivirheiden välttämiseksi lausekkeissa kannattaa käyttää nimittäjien poistamisen yhteydessä sulkuja.

$$\begin{aligned}
\frac{18x}{6}-\frac{4x}{6}&=\frac{6}{6}-\frac{6x-9}{6} \qquad |\cdot 6\\
18x-4x&=6-(6x-9)\\
14x&=6-6x+9\\
20x&=15 \qquad |:20\\
x&=\frac{15}{20}\ {}^{(5}\\
x&=\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Vastaus **a)** $x=-3$ **b)** $x=\frac{3}{4}$

Esimerkki 2

Ratkaise yhtälö $\frac{2x-1}{5}=\frac{x}{3}$.

Ratkaisu Yhtälön molemmilla puolilla on osamäärä, joten se on verranto. Yhtälö ratkaistaan kertomalla ristiin.

$$\frac{2x-1}{5}=\frac{x}{3}$$
$$3(2x-1)=5x$$
$$6x-3=5x$$
$$6x-5x=3$$
$$x=3$$

Vastaus $x=3$

Esimerkki 3

Millä muuttujan x arvoilla lausekkeen $2x+4$ arvot ovat pienempiä kuin lausekkeen $4(x-3)$ arvot?

Ratkaisu Lauseke $2x+4$ saa pienempiä arvoja kuin lauseke $4(x-3)$, kun $2x+4<4(x-3)$. Ratkaistaan tämä epäyhtälö.

$$2x+4<4(x-3)$$
$$2x+4<4x-12$$
$$2x-4x<-12-4$$
$$-2x<-16 \qquad |:(-2)$$
$$x>8$$

Kun jaetaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta vaihtuu.

Vastaus $x>8$

Esimerkki 4

Minea pyöräilee kotoaan läheiselle mökille. Jos Minea pyöräilee nopeudella 16 km/h, hänen matkansa kotoa mökille kestää 3,5 h. Kuinka kauan Minean matka kestäisi, jos hän pyöräilisi nopeudella 12 km/h, kun nopeus ja aika ovat kääntäen verrannolliset?

Ratkaisu Merkitään Minean matka-aikaa kirjaimella x.
Kootaan tiedot taulukkoon.

Nopeus (km/h)	Aika (h)
16	3,5
12	x

Koska nopeus ja aika ovat kääntäen verrannolliset saadaan:

$$\frac{16}{12} = \frac{x}{3,5}$$
$$12x = 16 \cdot 3,5 \quad |:12$$
$$x = 4,666...$$
$$x \approx 4,7 \text{ (h)}.$$

Vastaus 4,7 tuntia

Esimerkki 5

Kemistillä on 10-prosenttista suolahappoliuosta 800 ml. Kuinka monta millilitraa suolahappoliuokseen on lisättävä 3-prosenttista suolahappoliuosta, jotta saadaan 6-prosenttista suolahappoliuosta? Anna vastaus millilitran tarkkuudella.

Ratkaisu

Alkuperäisessä liuoksessa on suolahappoa $0{,}1 \cdot 800 \text{ ml} = 80 \text{ ml}$

Alkuperäiseen liuokseen lisätään 3-prosenttista suolahappoliuosta x ml.

- Tällöin koko liuoksen tilavuus on $(800 + x)$ ml.
- Liuoksessa on suolahappoa yhteensä $(80 + 0{,}03x)$ ml

Koska uudessa liuoksessa tulee olla suolahappoa 6 %, saadaan yhtälö

$$0{,}06(800 + x) = 80 + 0{,}03x$$

$$48 + 0{,}06x = 80 + 0{,}03x$$

$$0{,}03x = 32 \qquad |:0{,}03$$

$$x = 1066{,}666...$$

$$x \approx 1067 \text{ (ml)}.$$

Vastaus

3-prosenttista suolahappoliuosta on lisättävä 1 067 ml.

Esimerkki 6

Lentoyhtiön reittilennon hinta Helsingistä Roomaan nousi 8,0 %. Samalla matkustajamäärä väheni 12,0 %.

a) Kuinka paljon muuttuivat lentoyhtiön reittilennosta saamat myyntitulot?

b) Kuinka monta prosenttia uusien myyntitulojen pitäisi kasvaa, jotta päästäisiin takaisin alkuperäiseen myyntituloon?

Ratkaisu

a) Olkoon reittilennon hinta alussa a (€).
Hinta nousee 8,0 %, joten uusi hinta in $1{,}08a$ (€).

Merkitän matkustajamäärää alussa kirjaimella b. Matkustajamäärä vähenee 12,0 %, joten uusi matkustajamäärä on $0{,}88b$.

Myyntitulot muutosten jälkeen ovat:

$$1{,}08a \cdot 0{,}88b = 0{,}9504ab.$$

	Hinta (€)	Määrä	Myyntitulot (€)
Alussa	a	b	ab
Lopussa	$1{,}08a$	$0{,}88b$	$0{,}9504ab$

Myyntitulot vähenevät $1 - 0{,}9504 = 0{,}0496 \approx 5{,}0$ %.

b) Merkitään myyntitulojen kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x.

- Myyntitulot ennen korotusta $0{,}9504ab$ (€).
- Myyntitulot korotuksen jälkeen ab (€).

Saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} 0{,}9504ab \cdot x &= ab && \mid : ab \neq 0 \\ 0{,}9504x &= 1 && \mid : 0{,}9504 \\ x &= 1{,}0521\ldots \end{aligned}$$

Myyntitulojen on siis noustava $1{,}0521\ldots - 1 = 5{,}21\ldots$ % $\approx 5{,}2$ %.

Vastaus

a) Myyntitulot vähenivät 5,0 %.
b) Myyntitulojen on noustava 5,2 %.

Esimerkki 7

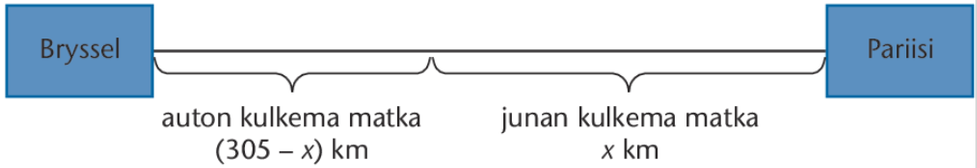
Brysselin ja Pariisin välimatka on 305 km. Kaupunkien välillä kulkee luotijuna, joka kulkee keskinopeudella 220 km/h. Juna lähtee Pariisista kohti Brysseliä klo 10.00. Samaan aikaan Brysselistä lähtee henkilöauto ajamaan kohti Pariisia.

a) Kuinka pitkän matkan päässä Pariisista juna ja henkilöauto kohtaavat, kun henkilöauton keskinopeus on 80 km/h?

b) Mihin kellonaikaan kohtaaminen tapahtuu?

Ratkaisu

a) Merkitään junan etäisyyttä Pariisista kohtaamishetkellä kirjaimella x.



Juna kulkee nopeudella 220 km/h, joten se on käyttänyt matkaan aikaa $\frac{x}{220}$ tuntia.

Auto on kulkenut matkan $305 - x$. Koska auton keskinopeus on 80 km/h, auton matkaan käyttämää aikaa kuvaa lauseke $\frac{305-x}{80}$.

Kohtaamishetkellä sekä juna että henkilöauto on käyttänyt yhtä paljon aikaa matkan tekemiseen, joten saadaan yhtälö:

$$\frac{x}{220} = \frac{305-x}{80}$$
$$80x = 220(305-x)$$
$$80x = 67100 - 220x$$
$$300x = 67100 \quad | : 300$$
$$x = 223{,}666...$$
$$x \approx 224 \text{ (km)}.$$

b) Matkaan on kulunut aikaa

$$\frac{x}{220} = \frac{223{,}666...}{220} = 1{,}01666... \text{ tuntia}$$
$$0{,}01666... \text{ h} = 0{,}01666... \cdot 60 \text{ min} = 1 \text{ min}.$$

Matkaan kului siis aikaa 1 h 1 min eli kello on 11.01.

Vastaus

a) 224 km päässä Pariisista. **b)** Kello on kohtaamishetkellä 11.01.

Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

40 Ratkaise yhtälö.

a) $1-2(x-3)=0$

b) $4(2-x)+3x=2-x$

c) $6x-2=3(2x-1)+1$

41 Ratkaise yhtälö $7x+3=31$. [K2012, 1a]

42 Ratkaise yhtälö $4x+(5x-4)=12+3x$. [K2011, 1a]

43 Ratkaise yhtälö $2(x+4)-3(x-3)=0$. [K2013, 1a]

44 Millä muuttujan x arvolla lausekkeet $2x+3$ ja $-(x+3)$ saavat saman arvon? [S2013, 1b]

45 Ratkaise yhtälö $\frac{2}{3}x-1=\frac{2}{3}$. [S2012, 1b]

46 Ratkaise yhtälö $\frac{1}{4}x+1=\frac{1}{5}(2x+2)$. [S2007, 1b]

47 Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=x-1$. [K2009, 1b]

48 Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2}(3x-2)=\frac{1}{3}(2x+3)$. [K2010, 1a]

49 Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3}+\frac{1-x}{4}=\frac{1}{6}$. [S2010, 1a]

50 Ratkaise yhtälö $\frac{5}{x}=-\frac{1}{2}$. [S2011, 1b]

51 Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3}=\frac{x-1}{4}$. [K2014, 1c]

52 Ratkaise yhtälö $\frac{2x+3}{4}=\frac{1-x}{2}$.

53 Ratkaise yhtälö $\frac{1-5x}{5}=\frac{3+4x}{2}$. [S2009, 1a]

54 Ratkaise yhtälö $\frac{7x+\frac{1}{2}}{3}-\frac{3x-\frac{1}{3}}{2}=2$. [K2012, 3a]

55 Ratkaise x yhtälöstä $\frac{ax}{2}-1=\frac{b-2}{2}$, kun a $\neq 0$. [S2011, 2b]

56 Ratkaise epäyhtälö.

a) $5x+1>3-x$

b) $2x-5\leq 5x+1$

57 Ratkaise epäyhtälö.

a) $2(x+3)\geq 1-(x-2)$

b) $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}<\frac{x}{3}-\frac{5}{6}$

58 Millä muuttujan x arvoilla $4x+17$ on suurempi kuin $2-x$? [K2013, 2a]

59 Millä muuttujan x arvoilla lauseke $\frac{x+2}{3}$ on pienempi kuin $\frac{1-x}{2}$?

60 Suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset. Kun $x=2$, on $y=5$. Mikä on suureen y arvo, kun $x=7$? [K2009, 2a]

61 Suureet x ja y ovat käänteen verrannolliset. Jos $x=2$, niin $y=3$. Mikä on y:n arvo, kun $x=5$? [S2008, 3b]

Tehtäviä laskimen kanssa

62 Tietosanakirjan ensimmäisessä osassa on 960 sivua. Kirjan paksuus ilman kansia on 6,0 cm. Kansi on tehty pahvista, jonka paksuus on 4 mm. Kuinka paksu on toinen osa kansineen, kun siinä on 1 120 sivua?

63 Pöydällä on kaksi palloa, joiden massat ovat yhtä suuret. Pienemmän pallon tilavuus on 1,2 dm^3 ja tiheys 6,5 kg/dm^3. Suuremman pallon tilavuus on 3,5 dm^3. Laske suuremman pallon tiheys, kun kappaleen tiheys on kääntäen verrannollinen kappaleen tilavuuteen.

64 Talon lämmityskustannukset pakkasella ovat suoraan verrannolliset sisä- ja ulkolämpötilojen väliseen erotukseen. Ulkolämpötilan ollessa –2,0 °C ja sisälämpötilan 22,0 °C sisälämpötila pudotetaan 21,0 °C:een. Kuinka monella prosentilla talon lämmityskustannukset tällöin pienenevät? [S2006, 6]

65 Kännykkäliittymän A kuukausimaksu on 4 euroa ja puhelumaksu 0,09 euroa minuutilta. Kännykkäliittymässä B ei ole kuukausimaksua, mutta puhelumaksu on 0,12 euroa minuutilta. Määritä kuukausilaskun suuruus kummassakin tapauksessa lausekkeena, jossa muuttujana on puheaika minuutteina. Millä puheajalla liittymien A ja B kuukausilaskut ovat yhtä suuret? [K2008, 5]

66 Ludwig van Beethoven, Wolfgang Amadeus Mozart ja Johann Sebastian Bach elivät yhteensä 156 vuotta. Bach eli yhdeksän vuotta vanhemmaksi kuin Beethoven, Mozart kuoli 21 vuotta nuorempana kuin Beethoven. Kuinka vanhoiksi säveltäjät elivät? [S2011, 4]

67 Osakkeen arvo laski 46 prosenttia ja nousi sitten ensiksi 15 prosenttia ja tämän jälkeen vielä 34 prosenttia.

a) Oliko osakkeen arvo näiden muutosten jälkeen suurempi vai pienempi kuin ennen muutoksia?

b) Kuinka monta prosenttia jälkimmäisen nousun olisi pitänyt olla, jotta olisi palattu alkuperäiseen arvoon? [S2011, 5]

68 Kuinka paljon 2-prosenttista desinfektioliuosta tarvitaan, jotta siitä laimennettuna saadaan 500 ml 0,35-prosenttista desinfektioliuosta? [S2006, 3]

69 Kuinka monta litraa 12-prosenttista suolaliuosta on lisättävä kolmeen litraan 5-prosenttista suolaliuosta, jotta saadaan 8-prosenttinen suolaliuos? [K2010, 4]

70 Boolimaljassa on 4,0 litraa sekoitusta, jonka tilavuudesta 70 % on kuohuviiniä ja 30 % mansikkamehua. Kuinka paljon siihen täytyy lisätä kuohuviiniä, jotta mehun osuus on 20 %? [K2014, 5]

71 Lentokoneen käyttökustannuksista polttoaineen osuus on 35 %. Kuinka monta prosenttia polttoaine voi kallistua, ennen kuin käyttökustannukset kasvavat 10 %? Anna vastaus promillen tarkkuudella [S2008, 4]

72 Henkilö osti 150 gramman erän maustettua teetä 3,30 eurolla ja halvempaa mustaa teetä, jonka hinta oli 5,50 €/kg. Kuinka monta grammaa mustaa teetä tulisi maustetee-erään lisätä, jotta sekoituksen kilohinta olisi puolet maustetun teen kilohinnasta? [S2007, 5]

73 Autoilija ajoi 28 kilometriä pitkän tieosuuden nopeudella 80 km/h. Lopun matkasta hän ajoi moottoritietä pitkin. Millä keskinopeudella hän ajoi moottoritieosuuden, kun hän perille tultuaan totesi keskinopeuden koko 75 kilometrin ajomatkansa osalta olleen 100 km/h? [K2006, 6]

74 Kaupunkeja A ja B yhdistää 170 kilometriä pitkä maantie. Alpo lähtee A:sta klo 8.20 ajamaan kohti B:tä keskinopeudella 120 km/h. Berit lähtee B:stä klo 8.35 ajamaan kohti A:ta keskinopeudella 105 km/h. Kuinka kaukana A:sta ja mihin aikaan Alpo ja Berit kohtaavat? Muodosta sopiva yhtälö ja ratkaise se. [K2009, 5]

75 Henkilön palkasta jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen 73 %. Vuodenvaihteessa henkilö sai 45 euron palkankorotuksen. Samanaikaisesti ennakonpidätys laski 0,8 prosenttiyksikköä. Henkilölle jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen nyt 49,60 euroa enemmän kuin ennen muutoksia, Mikä oli henkilön uusi ennakonpidätysprosentti ja mikä oli hänen uusi palkkansa? [K2005, 8]

76 Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset laskivat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat lomapaketin hinnasta ennen muutoksia? [K2008, 9]

3 Toisen asteen yhtälöt ja epäyhtälöt

Toisen asteen yhtälö

- **Toisen asteen yhtälö** voidaan sieventää muotoon $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.
- Jos kaikki kertoimet a, b ja c ovat nollasta eroavia reaalilukuja, yhtälöä sanotaan **täydelliseksi** toisen asteen yhtälöksi.
- Yhtälön ratkaisuja sanotaan myös **juuriksi**.
- Täydellinen toisen asteen yhtälö voidaan ratkaista **ratkaisukaavaa** käyttäen.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Ratkaisukaavassa lauseketta $b^2 - 4ac$ sanotaan **diskriminantiksi**.

  $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ Yhtälöllä on kaksi ratkaisua.

  $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$ Yhtälöllä on yksi ratkaisu.

  $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$ Yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua.

- Yhtälöt $ax^2 + bx = 0$ ja $ax^2 + c = 0$ ovat **vaillinaisia**. Ne voidaan ratkaista myös ilman ratkaisukaavaa joko tulon nollasäännön tai neliöjuuren avulla.

Toisen asteen polynomifunktio

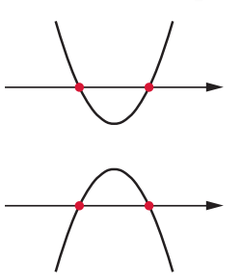
- Funktiota, joka voidaan sieventää muotoon $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, sanotaan toisen asteen polynomifunktioksi.
- Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on **paraabeli** $y = ax^2 + bx + c$.
- Paraabelin **aukeamissuunta** riippuu kertoimesta a.

Paraabeli aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$

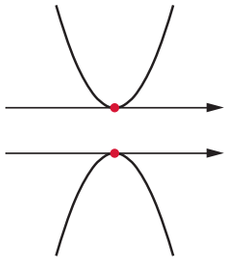
Paraabeli aukeaa alaspäin, jos $a < 0$

Funktion nollakohdat

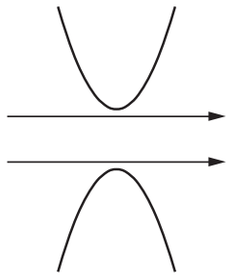
- **Nollakohdassa** funktio saa arvon nolla.
- Nollakohdassa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin.
- Nollakohdat saadaan merkitsemällä funktion lauseke yhtä suureksi kuin nolla ja ratkaisemalla saatu toisen asteen yhtälö.
- Toisen asteen polynomifunktiolla on 0, 1 tai 2 nollakohtaa.



kaksi nollakohtaa

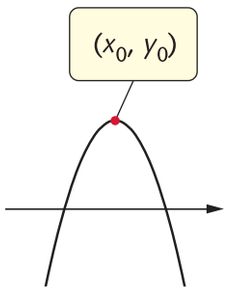


yksi nollakohta



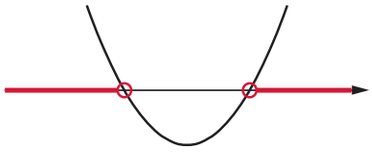
ei nollakohtia

- Kuvan pistettä (x_0, y_0) sanotaan paraabelin **huipuksi**.
- Paraabelin huippupisteen x-koordinaatti sijaitsee nollakohtien puolivälissä.

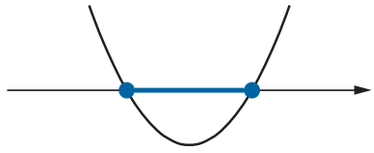


Toisen asteen epäyhtälö

- Epäyhtälössä yhtäsuuruusmerkki on korvattu epäyhtälömerkillä ($<$, $>$, $\leq$ tai $\geq$).
- Epäyhtälön ratkaisemisessa käytetään kuvaajaa apuna.
- Ratkaisu etenee seuraavasti:
  1. Sievennetään epäyhtälö muotoon, jossa epäyhtälön oikealla puolella on luku nolla ja vasemmalla puolella lauseke $ax^2 + bx + c$.
  2. Ratkaistaan lausekkeen $ax^2 + bx + c$ nollakohdat.
  3. Hahmotellaan lauseketta vastaavan paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ kuvaaja.
  4. Päätellään kuvaajan ja nollakohtien avulla epäyhtälön ratkaisu.



$f(x) > 0$



$f(x) \leq 0$

Esimerkki 1

Ratkaise yhtälöt.

a) $5x - 2x^2 = 0$ **b)** $3x^2 - 12 = 0$ **c)** $x^2 + x - 6 = 0$

Ratkaisu

a) Tällainen vaillinainen yhtälö voidaan ratkaista käyttämällä tulon nollasääntöä. Tätä ennen on yhtälön vasemmalta puolelta erotettava x yhteiseksi tekijäksi.

$$5x - 2x^2 = 0$$
$$x(5 - 2x) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 5 - 2x = 0$$
$$-2x = -5 \quad |:(-2)$$
$$x = \frac{5}{2}$$

b) Muokataan vaillinainen yhtälö muotoon, jossa muuttujatermi on vasemmalla ja vakiotermi oikealla puolella.

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12 \quad |:3$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$= \pm 2$$

c) Ratkaistaan yhtälö ratkaisukaavalla.

$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x = \frac{4}{2} = 2 \text{ tai } x = \frac{-6}{2} = -3$$

Vastaus **a)** $x = 0$ tai $x = \frac{5}{2}$ **b)** $x = \pm 2$ **c)** $x = 2$ tai $x = -3$

Esimerkki 2

Määritä funktion $f(x) = (x+1)^2 - 1$ nollakohdat.

Ratkaisu Merkitään funktion lauseke nollaksi ja ratkaistaan saatu toisen asteen yhtälö.

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - 1 &= 0\\ (x+1)(x+1) - 1 &= 0\\ x^2 + x + x + 1 - 1 &= 0\\ x^2 + 2x &= 0\\ x(x+2) &= 0\end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ tai } x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

Vastaus $x = 0$ tai $x = -2$

Esimerkki 3

Missä pisteissä paraabeli $y = -3x^2 + 14x - 8$ leikkaa koordinaattiakselit?

Ratkaisu Kun paraabeli leikkaa y-akselin, $x = 0$. Sijoittamalla muuttujan paikalle nolla saadaan leikkauspisteen y-koordinaatti.

$$y = -3 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 - 8 = -8$$

x-akselin leikkauskohta saadaan merkitsemällä paraabelin lauseke nollaksi ja ratkaisemalla saatu yhtälö.

$$-3x^2 + 14x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{-6}$$

$$x = \frac{-14 \pm 10}{-6}$$

$$x = 4 \text{ tai } x = -\frac{2}{3}$$

Vastaus Pisteissä $(0, -8)$, $(4, 0)$ ja $(-\frac{2}{3}, 0)$.

Esimerkki 4

Millä muuttujan x arvoilla lauseke $50x^2 - 5x - 1$ saa negatiivisia arvoja?

Ratkaisu

Lauseke saa negatiivisia arvoja, kun

$$50x^2 - 5x - 1 < 0.$$

Lausekkeen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan paraabelin nollakohdat.

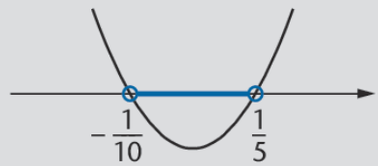
$$50x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 50 \cdot (-1)}}{2 \cdot 50}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{225}}{100}$$

$$x = \frac{5 \pm 15}{100}$$

$$x = \frac{1}{5} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{10}$$



Nollakohtien välissä paraabeli on x-akselin alapuolella.

Lausekkeen arvot ovat negatiivisia välillä $-\frac{1}{10} < x < \frac{1}{5}$.

Vastaus

Lauseke saa negatiivisia arvoja, kun $-\frac{1}{10} < x < \frac{1}{5}$.

Esimerkki 5

Arkkitehti Matti Suuronen suunnitteli vuonna 1965 prototyypin talosta, jonka poikkileikkauksen voidaan ajatella muodostuvan kahdesta paraabelista. Poikkileikkauksen yläosa oli funktion

$$f(x) = -0{,}125x^2 + 2{,}25x - 8{,}125$$

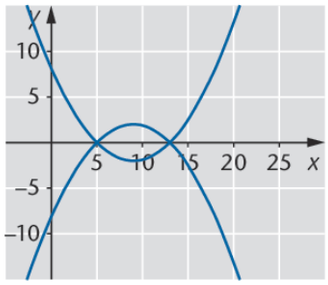
x-akselin yläpuolisen osan muotoinen. Toisen osan muodosti funktion

$$g(x) = -f(x) = 0{,}125x^2 - 2{,}25x + 8{,}125$$

x-akselin alapuolinen osuus. Future-nimisen talon perusta oli teräsputkijaloilla lepäävä rengasjalusta. Tällä hetkellä Futuron prototyyppi on Hollannissa Utrechtin Centraal Museumin kokoelmissa. Laske Futuron leveys (leveimmältä kohdalta) ja suurin korkeus, kun koordinaatiston yksikkönä on 1 m.

Ratkaisu Piirretään tilanteesta mallikuva.

Funktioiden kuvaajat ovat toistensa peilikuvia x-akselin suhteen. Tällöin niillä on samat nollakohdat. Molempien funktioiden huiput ovat yhtä kaukana x-akselista.



Talon leveys saadaan laskemalla funktioiden nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$-0{,}125x^2 + 2{,}25x - 8{,}125 = 0$$

$$x = \frac{-2{,}25 \pm \sqrt{2{,}25^2 - 4 \cdot (-0{,}125) \cdot (-8{,}125)}}{2 \cdot (-0{,}125)}$$

$$x = \frac{-2{,}25 \pm \sqrt{1}}{-0{,}25}$$

$$x = \frac{-2{,}25 \pm 1}{-0{,}25}$$

$$x = 5 \text{ tai } x = 13$$

Talon leveys on siis $(13 - 5)$ m $= 8$ m.
Paraabelin huippupisteen x-koordinaatti on $\frac{5+13}{2} = 9$.

Tällöin y-koordinaatti on $f(9) = -0{,}125 \cdot 9^2 + 2{,}25 \cdot 9 - 8{,}125 = 2$.
Talon suurin korkeus on siis 2 m + 2 m = 4 m.

Vastaus Suurin leveys on 8 m ja suurin korkeus 4 m.

Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

77 Ratkaise yhtälöt ilman ratkaisukaavaa.

a) $x^2 - 8x = 0$ **b)** $2x^2 - 32 = 0$

c) $x^2 = 3x$

78 Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x = 0$.[S2012, 1a]

79 Ratkaise yhtälö $2x + 1 = x^2 + 2x$. [K2008, 1a]

80 Ratkaise yhtälö $7x^2 + 3x = 0$. [S2007, 1a]

81 Ratkaise yhtälö $(x - 2)^2 = 4$. [S2013, 1a]

82 Ratkaise yhtälö $(x + 2)(x - 2) = 5$. [K2010, 1b]

83 Ratkaise yhtälö $x^2 - 3(x + 3) = 3x - 18$. [S2011, 1c]

84 Ratkaise yhtälö $(x - 2)^2 - 4(2 - x) = 0$. [S2010, 1b]

85 Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 + 3x + 4 = 0$ **b)** $x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $4x - 2x^2 = 2$

86 Määritä funktion $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ nollakohdat.

87 Määritä vakio a siten, että paraabeli $y = (2a - 8)x^2 + 2x - 1$

a) aukeaa alaspäin

b) ainoastaan sivuaa x-akselia yhdessä pisteessä.

88 Missä pisteissä funktio $f(x) = -3x^2 - 5x + 2$ leikkaa koordinaattiakselit?

89 Määritä paraabelin $y = 4x^2 + 5x + 1$ ja koordinaattiakseleiden leikkauspisteet.

90 Ratkaise epäyhtälö $x^2 < -2x$.

91 Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = 3 - 3x^2$ saa positiivisia arvoja?

92 Määritä sellaiset luvut a, h ja k, että paraabelin $y = 2x^2 - 4x - 1$ yhtälö saa muodon $y - k = a(x - h)^2$. [K2010, 12]

Tehtäviä laskimen kanssa

93 Ratkaise yhtälö $x^2 + 14x = -49$. [K2013, 2b]

94 Ratkaise yhtälö $4x^2 + 9 = -12x$. [S2008, 1a]

95 Ratkaise yhtälö $4x^2 - 8x + 3 = 0$. [S2009, 1c]

96 Ratkaise yhtälö $7x(3 + 7x) - 4 = 0$. [K2007, 1b]

97 Laske paraabelin $y = 2x^2 - 3x - 9$ nollakohdat ja huippupiste.

98 Määritä paraabelin aukeamissuunta, nollakohdat sekä huipun koordinaatit.
a) $y = x^2 + 2x - 24$ **b)** $y = -2x^2 + 20x - 32$

99 Ratkaise epäyhtälö $(x + 2)^2 \geq -x - 2$

100 Tutkitaan funktiota g:
$g(x) = 2x^2 + 11x - 6$
a) Määritä funktion nollakohdat.
b) Milloin $g < 0$?

101 Tutki, millä muuttujan x arvoilla polynomi $2x^2 + 5x - 3$ saa negatiivisia arvoja. [K2009, 3b]

102 Tarkastellaan paraabelia
$y = x^2 - 12x + 35$.
a) Missä pisteissä paraabeli leikkaa x-akselin?
b) Määritä paraabelin huipun koordinaatit. [S2012, 4]

103 Määritä sellainen vakio a, että $x = 2$ toteuttaa yhtälön $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$. [K2011, 3a]

104 Valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen etäisyyden toiseen potenssiin. Taskulampun valaistusvoimakkuus 60 cm päässä on 1,0 luksia (lx). Kuinka kaukana lamppu on, jos valaistusvoimakkuus on enää 0,2 luksia? Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.

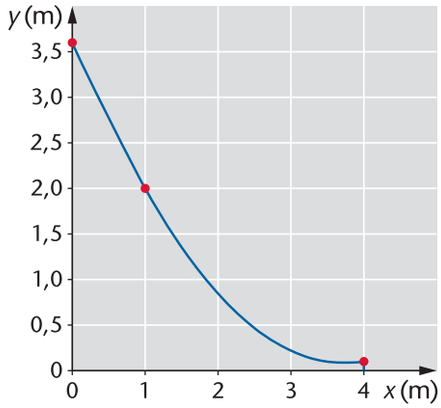
105 Kappaleen paino on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Lentokone painaa maan pinnalla 56,0 tonnia. Kuinka paljon se painaa kymmenen kilometrin korkeudessa? Maan pinnan etäisyys keskipisteestä on 6370 kilometriä? [K2006, 4]

106 Auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Mittauksissa havaittiin, että jarrutusmatka nopeudesta 40 km/h on 11,0 metriä.
a) Mikä on auton jarrutusmatka nopeudesta 80 km/h?
b) Auton jarrutusmatkaksi mitattiin 21,3 metriä. Mikä oli auton nopeus jarrutuksen alkaessa? Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella. [S2013, 7]

107 Huvipuistossa on uima-altaaseen johtava liukumäki. Sen sivuprofiili on likimain paraabelin $y = 0{,}25x^2 - 1{,}85x + 3{,}6$ muotoinen välillä $0 \le x \le 4$. Muuttuja x on vaakasuora etäisyys metreinä liukumäen yläosasta ja y liukumäen korkeus metreinä vedenpinnan tasosta. Kuinka korkealta

a) liukuminen aloitetaan

b) pudotaan veteen?



108 Muurahaiskeon poikkileikkausta keskikohdalta esittää paraabelin $y = -1{,}6x^2 + 2{,}4x$ se osa, joka jää x-akselin yläpuolelle. Maanpintaa kuvaa x-akseli. Laske keon maanpäällisen osan korkeus huippukohdassa, kun koordinaatiston yksikkönä on metri.

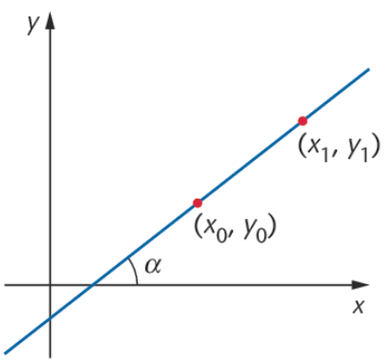
109 Kahden suuren kaupungin A ja B välissä kulkee valtatie. Tutkimuksessa havaittiin, että asuntojen hinnat valtatien varteen syntyneissä pikkukaupungeissa riippuvat etäisyydestä suuriin kaupunkeihin. Jos etäisyys kaupunkiin A on x kilometriä, asunnon neliöhintaa y (€) kuvaa paraabeli $y = 0{,}0256x^2 - 6{,}4x + 1\,000$. Määritä mallin avulla kaupunkien A ja B välinen etäisyys, kun tiedetään, että keskimääräiset neliöhinnat näissä kaupungeissa ovat samat. Mikä on neliöhinta puolessa välissä mainittuja kaupunkeja?

4 Lineaarinen malli

Suoran yhtälö

- Ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja on **suora**.
- Suoran yhtälön
  - ratkaistu muoto $y = kx + b$
  - yleinen muoto $ax + by + c = 0$
- Suoran yhtälön ratkaistusta muodosta nähdään **kulmakerroin** k sekä suoran ja y-akselin **leikkauspiste** $(0, b)$.
- Kun suora kulkee pisteiden (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) kautta, suoran
  - kulmakerroin $k = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
  - yhtälö on $y - y_0 = k(x - x_0)$
- Kulmakerroin kertoo suoran **kulkusuunnan** ja **jyrkkyyden**.
  - $k > 0$ suora on nouseva
  - $k < 0$ suora on laskeva
  - $k = 0$ suora on x-akselin suuntainen
  - k ei määritelty suora y-akselin suuntainen
- Suoran ja x-akselin välistä kulmaa kutsutaan **suuntakulmaksi**. Suuntakulma saadaan kulmakertoimesta tangentin avulla.

  $\tan\alpha = k$



- Suorat s ja t ovat **yhdensuuntaiset**, kun kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

  $k_s = k_t$

- Suorat s ja t ovat **kohtisuorassa toisiaan vastaan**, kun kulmakertoimien tulo on -1.

  $k_s \cdot k_t = -1$

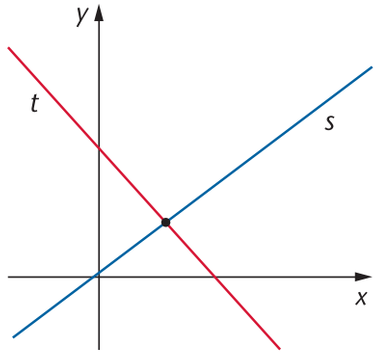
- Kohtisuoraa suoraa kutsutaan **normaaliksi**.
- Suora leikkaa
  - x-akselin, kun $y = 0$
  - y-akselin, kun $x = 0$.

Yhtälöpari

- Ensimmäisen asteen **yhtälöpari** muodostuu kahdesta kahden muuttujan yhtälöstä eli kahdesta suoran yhtälöstä.

- Yhtälöparin ratkaisun on toteutettava molemmat yhtälöparin yhtälöt.

- **Kahden suoran leikkauspiste** ratkaistaan yhtälöparin avulla.



- Yhtälöpari voidaan ratkaista
  - **sijoitusmenetelmällä**
  - **yhteenlaskumenetelmällä.**

- Yhtälöpari kannattaa ratkaista sijoitusmenetelmän avulla, kun vähintään toinen yhtälöistä on ratkaistussa muodossa.
  1. Sijoitetaan ratkaistun muuttujan lauseke toiseen yhtälöön.
  2. Ratkaistaan näin saatu yhden muuttujan yhtälö.
  3. Sijoitetaan ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön (ratkaistu muoto) ja lasketaan toiselle muuttujalle arvo.

- Yhtälöpari kannattaa ratkaista yhteenlaskumenetelmän avulla, kun yhtälöt eivät ole ratkaistussa muodossa.
  1. Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että toinen muuttuja saadaan eliminoitua.
     - Esimerkiksi muuttujan x kertoimet eri yhtälöissä ovat toistensa vastalukuja.
  2. Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.
  3. Ratkaistaan näin saatu yhden muuttujan yhtälö.
  4. Sijoitetaan ratkaisu jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaistaan toinen muuttuja.

Esimerkki 1

Suora kulkee pisteiden (1, 4) ja (2, –2) kautta.

a) Määritä suoran yhtälö.

b) Laske suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

c) Onko piste (10, –12) suoralla?

Ratkaisu

a) Lasketaan ensin pisteiden avulla suoran kulmakerroin.

$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

$$k = \frac{4-(-2)}{1-2} = \frac{6}{-1} = -6$$

Määritetään kulmakertoimen $k = -6$ ja pisteen (1, 4) avulla suoran yhtälö.

$y - y_0 = k(x - x_0)$

$$y - 4 = -6(x-1)$$
$$y - 4 = -6x + 6$$
$$y = -6x + 10$$

b) Suoran ja y-akselin leikkauspiste nähdään suoran yhtälön vakiotermistä. Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 10).

Suoran ja x-akselin leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$-6x + 10 = 0$$
$$-6x = -10 \quad |:(-6)$$
$$x = \frac{-10}{-6} \quad {}^{(-2}$$
$$x = \frac{5}{3}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

c) Piste on suoralla, jos pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Sijoitetaan suoran $y = -6x + 10$ yhtälöön $x = 10$ ja $y = -12$.

$$-12 = -6 \cdot 10 + 10$$
$$-12 = -50$$

epätosi

Koska yhtälö ei toteudu, piste ei ole suoralla.

Vastaus

a) $y = -6x + 10$ **b)** (0, 10) ja $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ **c)** Piste ei ole suoralla.

Esimerkki 2

Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = -x - 4 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases}$.

Ratkaisu Koska toinen yhtälöistä on ratkaistussa muodossa, ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan $y = -x - 4$ alempaan yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 2x - (-x - 4) + 5 &= 0 \\ 2x + x + 4 + 5 &= 0 \\ 3x &= -9 \quad |:3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu arvo $x = -3$ ensimmäiseen yhtälöön $y = -x - 4$.

$$y = -(-3) - 4 = 3 - 4 = -1$$

Vastaus $x = -3$ ja $y = -1$

Suorat $y = -x - 4$ ja $2x - y + 4 = 0$ leikkaavat pisteessä $(-3, -1)$.

Esimerkki 3

Suoran s yhtälö on muotoa $y = kx + b$.

a) Määritä k ja b, kun suora kulkee pisteiden $(1, 3)$ ja $(2, -1)$ kautta.

b) Onko suora s nouseva vai laskeva?

c) Suora t on yhdensuuntainen suoran s kanssa. Määritä suoran t yhtälö, kun suora kulkee pisteen $(5, 2)$ kautta.

d) Suora r on kohtisuorassa suoraa s vastaan. Määritä suoran r yhtälö, kun suora r leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 9)$.

Ratkaisu

a) Sijoitetaan pisteiden koordinaatit suoran yhtälön ratkaistuun muotoon $y = kx + b$.

- Piste $(1, 3)$: $3 = k \cdot 1 + b$
- Piste $(2, -1)$: $-1 = k \cdot 2 + b$

Vakiot k ja b saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} k + b = 3 \\ 2k + b = -1 \end{cases}$.

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} k+b=3 \\ 2k+b=-1 \quad \vert \cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} k+b=3 \\ -2k-b=1 \end{cases} \\ + \\ \hline \qquad -k=4 \quad \vert :(-1) \\ \qquad\quad k=-4 \end{array}$$

Sijoitetaan $k=-4$ ensimmäiseen yhtälöön $k+b=3$.

$$\begin{aligned} -4+b&=3 \\ b&=7 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on siis muotoa $y=-4x+7$.

b) Koska kulmakerroin $k=-4<0$, suora on laskeva.

c) Koska suora t on yhdensuuntainen suoran s kanssa, niillä on sama kulmakerroin. Suoran t yhtälö on siis muotoa $y=-4x+b$.

Piste $(5, 2)$ on suoralla, joten pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.

$$\begin{aligned} 2&=-4\cdot 5+b \\ b&=-20+2 \\ b&=-18 \end{aligned}$$

Suoran t yhtälö on $y=-4x-18$.

d) Suora r on kohtisuorassa suoraa s vastaan. Kulmakertoimien tulo on tällöin -1. Olkoon suoran r kulmakerroin k_r.

$$\begin{aligned} -4\cdot k_r&=-1 \quad \vert :(-4) \\ k_r&=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Koska suora r leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 9)$, on suoran yhtälö muotoa $y=\frac{1}{4}x+9$.

Vastaus

a) $y=-4x+7$ **b)** Suora on laskeva.

c) $y=-4x-18$ **d)** $y=\frac{1}{4}x+9$

Esimerkki 4

Suorat $x + y + 2 = 0$ ja $x + 2y - 1 = 0$ rajaavat x-akselin kanssa koordinaatistosta kolmion. Piirrä kuvio ja laske kolmion pinta-ala.

Ratkaisu

Piirtämistä varten kirjoitetaan suorien yhtälöt ensin ratkaistussa muodossa.

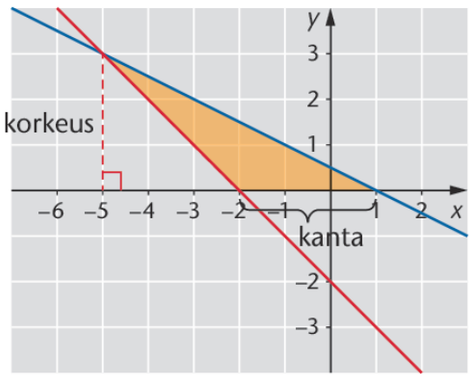
$$x + y + 2 = 0$$
$$y = -x - 2$$

$$x + 2y - 1 = 0$$
$$2y = -x + 1 \quad |:2$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Lasketaan kummaltakin suoralta muutama piste.

x	$y = -x - 2$
0	$y = -0 - 2 = -2$
1	$y = -1 - 2 = -3$
−1	$y = -(-1) - 2 = -1$

x	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
0	$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
1	$y = -\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = 0$
−1	$y = -\frac{1}{2} \cdot -(1) + \frac{1}{2} = 1$



Kolmion kanta saadaan suorien ja x-akselin leikkauspisteiden avulla. Lasketaan suorien ja x-akselin leikkauspisteet.

$$x + 0 + 2 = 0$$
$$x = -2$$

$$x + 2 \cdot 0 - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Koska x-akselilla $y = 0$, sijoitetaan $y = 0$ suorien yhtälöihin.

Kolmion kannan pituus on 3.

Kolmion korkeus saadaan suorien leikkauspisteen y-koordinaatista. Ratkaistaan leikkauspiste yhtälöparista

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 & |\cdot(-1) \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$
$$+$$
$$y - 3 = 0$$
$$y = 3$$

Kolmion pinta-ala $A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$

Vastaus

Kolmion pinta-ala on $\frac{9}{2}$.

Esimerkki 5

Suoran s yhtälö on $3x - 4y + 1 = 0$.

a) Kuinka suuren kulman suora muodostaa positiivisen x-akselin kanssa?

b) Laske suoran s ja suoran $2x - 2y - 2 = 0$ leikkauspisteen etäisyys origosta. Anna vastaus tarkkana arvona sekä likiarvona yhden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu

a) Kirjoitetaan suoran yhtälö ensin ratkaistussa muodossa.

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 1 &= 0 \\ -4y &= -3x - 1 \quad |:(-4) \\ y &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Suoran ja x-akselin välisen kulman suuruus saadaan kulmakertoimen $k = \frac{3}{4}$ avulla.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{3}{4} \\ \alpha &= 36{,}869...^\circ \approx 37^\circ \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin suorien leikkauspisteen koordinaatit yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 2x - 2y - 2 = 0 \quad |\cdot(-2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ -4x + 4y + 4 = 0 \end{cases} \\ + \\ \hline -x + 5 = 0 \\ -x = -5 \quad |:(-1) \\ x = 5 \end{array}$$

Sijoitetaan $x = 5$ ylempään yhtälöön ja ratkaistaan y.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 - 4y + 1 &= 0 \\ -4y &= -16 \quad |:(-4) \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Suorien leikkauspisteessä $x = 5$ ja $y = 4$ eli leikkauspiste on $(4, 5)$.

Lasketan leikkauspisteen etäisyys origosta.

$$d = \sqrt{(5-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} = 6{,}4031... \approx 6{,}4$$

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) välinen etäisyys

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vastaus **a)** 37° **b)** $\sqrt{41} \approx 6{,}4$

Esimerkki 6

Pekka vietti kesälomansa lomaillen mökillään tai kaupunkiasunnossaan. Ruokakustannukset tänä aikana olivat yhteensä 260 €. Muut kulut olivat yhteensä 174 €. Kesämökillä ruokaan kului päivittäin keskimäärin 8 € ja kaupungissa 12 €. Muut kulut kesämökillä olivat keskimäärin 4 € päivässä ja kaupungissa 10 €. Kuinka monta lomapäivää Pekka vietti mökillään ja kuinka monta kaupungissa?

Ratkaisu Merkitään mökillä vietettyä aikaa kirjaimella x ja kaupungissa vietettyä aikaa kirjaimella y.

	Kustannukset mökillä (€)	**Kustannukset kaupungissa (€)**	**Yhteensä (€)**
Ruokamenot (€)	$8x$	$12y$	260
Muut kulut (€)	$4x$	$10y$	174

Taulukon tiedoista saadaan yhtälöpari.
Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} 8x+12y=260 \\ 4x+10y=174 \end{cases} \quad |\cdot(-2)$$

$$\begin{cases} 8x+12y=260 \\ -8x-20y=-348 \end{cases} \quad +$$

$$-8y=-88 \quad |:(-8$$

$$y=11$$

Ratkaistaan x sijoittamalla $y=11$ yhtälöön $4x+10y=174$:

$$4x+10\cdot 11=174$$

$$4x=64 \quad |:4$$

$$x=16$$

Vastaus: Pekka oli mökillä 16 päivää ja kaupungissa 11 päivää.

Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

110 Missä pisteessä suora $x - 5y = 4$ leikkaa y-akselin? [K2014, 2a]

111 Suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{3}$, ja suora kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta. Esitä suoran yhtälö muodossa $y = kx + b$. [K2009, 3a]

112 Suora kulkee pisteiden $(-2, 0)$ ja $(1, 7)$ kautta. Muodosta sen yhtälö muodossa $y = ax + b$. [S2008, 2a]

113 Suora kulkee origon ja pisteen $(2, 3)$ kautta. Kulkeeko se myös pisteen $(48, 75)$ kautta? [K2013, 2c]

114 **a)** Määritä pisteiden $(1, 2)$ ja $(4, 3)$ kautta kulkevan suoran yhtälö muodossa $y = ax + b$.

b) Onko piste $(120, 40)$ tällä suoralla? [K2007, 5]

115 Suora kulkee pisteiden $(-2, 1)$ ja $(2, 9)$ kautta. Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?

116 Suoran s yhtälö on $y = 3x + 7$.

a) Suora t kulkee pisteen $(1, -4)$ kautta ja on yhdensuuntainen suoran s kanssa. Määritä suoran t yhtälö.

b) Suora r kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa s vastaan. Määritä suoran r yhtälö.

117 Suora kulkee pisteiden $(-6, -1)$ ja $(2, 3)$ kautta. Määritä suoran pisteeseen $(2, 3)$ piirretyn normaalin yhtälö.

118 Olkoon annettuna kaksi pistettä $A = (2, 6)$ ja $B = (1, -1)$. Määritä

a) pisteiden A ja B määrittämän suoran yhtälö

b) janan AB pituus

c) janan AB keskipisteen koordinaatit. [S2006, 2]

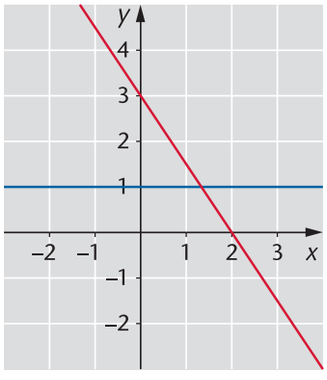
119 Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}$. [K2012, 1c]

120 Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$. [S2012, 1c]

121 Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$. [S2013, 2b]

122 Määritä suorien $x + y = 2$ ja $2x - y = 5$ leikkauspiste. [K2010, 1c]

123 Oheisessa kuviossa on kaksi suoraa. Määritä näiden yhtälöt, ja laske niiden leikkauspisteen koordinaatit. Mikä on suorien ja y-akselin rajaaman kolmion pinta-ala? [S2010, 3]



124 Määritä suorien $y = 2x - 3$ ja $y = 3x - 2$ leikkauspiste P. Suora s kulkee pisteen P ja $Q = (7, 7)$ kautta. Määritä suoran s yhtälö. Piirrä kuvio. [S2007, 4]

125 Määritä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $A = (-1, 1)$ ja $B = (8, 4)$ yhdysjanan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa tätä janaa vastaan. Missä pisteessä suora leikkaa koordinaattiakselit? Piirrä kuvio. [K2010, 9]

126 Tarkastellaan suoria $y = 4x + 1$ ja $2x - y + 3 = 0$.

a) Suorat rajaavat koordinaatistosta y-akselin kanssa kolmion. Laske kolmion pinta-ala.

b) Suorat rajaavat koordinaatistosta x-akselin kanssa kolmion. Laske kolmion pinta-ala.

127 Millä vakion a arvoilla yhtälöparilla

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y = 5 \\ 3x + (a-2)y = a \end{cases}$$ ei ole ratkaisua?

[S2010, 13]

Tehtäviä laskimen kanssa

128 Määritä vakio a siten, että suora $ay - (a + 10)x - 2 = 0$ kulkee pisteen (5, 31) kautta. Onko suora nouseva vai laskeva?

129 **a)** Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x + b$ nollakohta on $x = 2$. Määritä vakion b arvo.

b) Missä pisteessä a-kohdan funktion kuvaaja leikkaa y-akselin?

c) Kuinka suuren terävän kulman a-kohdan funktion kuvaaja muodostaa x-akselin kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella? [K2012, 4]

130 Suora kulkee pisteiden (1, 0) ja (3, 3) kautta. Kuinka suuren kulman se muodostaa x-akselin positiivisen suunnan kanssa? Anna vastaus kymmenesosan tarkkuudella. [K2008, 3b]

131 Aikuisen ihmisen sääriluun pituus y riippuu henkilön pituudesta x kaavojen

$y = 0{,}43x - 27$ (nainen)

$y = 0{,}45x - 31$ (mies)

mukaisesti, kun yksikkönä on senttimetri.

a) Arkeologi löytää naisen sääriluun, joka on 41 cm pitkä. Kuinka pitkä nainen oli?

b) Kaivauksissa löytyneen miehen pituudeksi arvioidaan 175 cm. Miehen läheltä löytyy sääriluu, jonka pituus on 42 cm. Onko kyseessä saman henkilön sääriluu? [S2012, 11]

132 Helsingin kaupunki teetti ennusteen kaupungin väestönkasvusta vuodesta 2012 alkaen. Ennusteen mukaan asukasluku kasvaa lineaarisesti aikavälillä 2012–2030 niin, että kaupungissa on 607 416 asukasta vuoden 2014 alussa ja 629 894 asukasta vuoden 2018 alussa. ennusteessa ei otettu huomioon mahdollisia kuntaliitoksia.

a) Ennusteen mukaan asukasluku y toteuttaa yhtälön $y = a(x - 2014) + b$, kun x on vuosiluku. Määritä vakioiden a ja b tarkat arvot käyttämällä yllä mainittuja tietoja.

b) Kuinka paljon asukasluku kasvaa ennusteen mukaan aikavälillä 2014–2030? Anna vastaus 1 000 asukkaan tarkkuudella.

c) Piirrä asukasluvun y kuvaaja välillä $2014 \leq x \leq 2030$.

[K2014, 14]

133 Millä vakion a arvoilla suorat $y = -3x + 2$ ja $y = ax + 6$ erottavat x-akselista janan, jonka pituus on 3? [S2008, 8]

134 Kiinalainen arvoitus 5000 vuoden takaa: Häkissä on fasaaneja ja kaniineja. Niillä on yhteensä 35 päätä ja 94 jalkaa. Kuinka monta fasaania ja kuinka monta kaniinia häkissä on? [K2014, 6]

135 Taksimatkan hinta muodostuu kiinteästä perusmaksusta ja matkan pituudesta riippuvasta maksusta. Nelli ajoi yöllä taksilla 5,0 km:n matkan, jolloin matkan hinta oli 11,10 €. Matin 18 km:n matka lentokentälle samaan vuorokaudenaikaan maksoi 22,80 €. Laske perusmaksun suuruus. Kuinka paljon taksi ottaa korvausta ajokilometriltä?

136 Suodatinkahvikupissa on kofeiinia 90 mg ja energiaa 39 kJ. Pannukahvikupissa on kofeiinia 70 mg ja energiaa 18 kJ. Juodusta kahvista saatu kokonaisenergia oli 153 kJ ja kofeiinimäärä 410 mg. Laske, kuinka monta kuppia juotiin pannukahvia ja kuinka monta suodatinkahvia.

137 Keltaista ja sinistä väripigmenttiä käytettiin kahden erisävyisen vihreän maalin sekoittamiseen. Maaliin A tarvittiin litraa kohden 80 g keltaista pigmenttiä ja 110 g sinistä pigmenttiä, maaliin B vastaavasti 120 g keltaista ja 90 g sinistä pigmenttiä. Kuinka monta litraa kumpaakin maalia valmistettiin, kun keltaista pigmenttiä käytettiin 3,2 kg ja sinistä 3,5 kg? [S2007, 8]

138 Kupari-nikkeliseoksessa on 75 % kupparia ja 25 % nikkeliä. Toisessa kupari-nikkeliseoksessa on kuparia 80 % ja nikkeliä 20 %. Näistä valmistetaan sulattamalla 300 g kuparinikkeliseosta, jonka nikkelipitoisuus on 22 %. Kuinka paljon kumpaakin seosta tähän tarvitaan? [S2008, 6]

139 Antti ja Erin ajavat samaa tietä Tampereelle. Antti lähtee Helsingistä ja ajaa Tampereen moottoritiellä keskinopeudella 120 km/h. Erin lähtee samaan aikaan, mutta hänen lähtöpaikkansa on 30 km edempänä matkan varrella. Erinin keskinopeus on 100 km/h. Muodosta Antin ja Erinin ajamista matkoista y (km) ja matkoihin käytetyistä ajoista x (h) suorien yhtälöt ja laske niiden avulla, kuinka kauan he ovat ajaneet, kun Antti saavuttaa Erinin.

140 Koordinaatistoon sijoitetussa kartassa joki kulkee pitkin suoraa $y = 4x + 8$. Tähän jokeen laskee kaksi sivujokea, jotka kulkevat suorien $y = -2x + 4$ ja $y = \frac{1}{2}x - 3$ mukaisesti. Laske kilometrin tarkkuudella, kuinka kaukana toisistaan sivujokien yhtymäkohdat pääjokeen ovat, kun koordinaatiston yksikkönä on 10 km.

141 Valtatieltä, jota kuvaa kartalla suora $y = \frac{2}{3}x$, käännytään kohtisuorasti origosta alkavalle kantatielle. Kantatietä ajetaan suoran suuntaisesti, kunnes saavutaan kylätien risteykseen. Kylätietä jatketaan suoraan valtatien suuntaisesti kartan pisteeseen (–3, 11), jossa kesämökki sijaitsee.

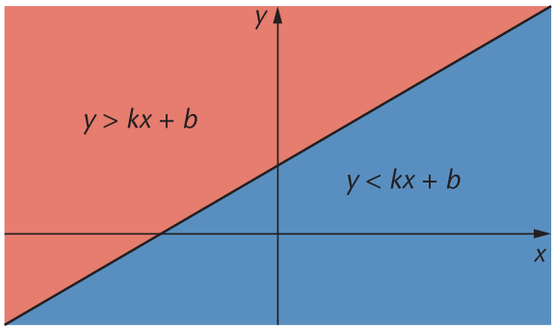
a) Määritä kantatien ja kylätien risteyksen koordinaatit, kun kartan koordinaatiston origo on valittu valtatien ja kantatien risteykseen.

b) Laske kilometrin tarkkuudella, kuinka pitkä matka ajetaan kantatietä, kun yksi yksikkö kartalla vastaa 1 km luonnossa.

5 Epäyhtälöryhmät ja optimointi

Kahden muuttujan epäyhtälö

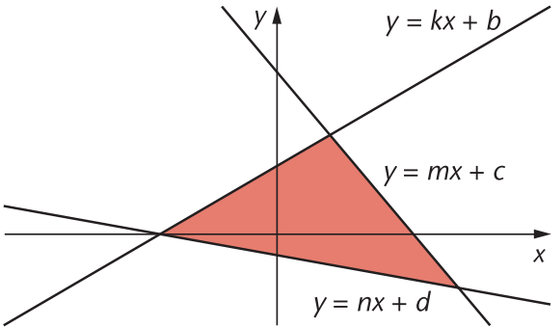
- Suora jakaa xy-tason kahteen osaan: suoran $y = kx + b$ yläpuolista osaa esittää epäyhtälö $y > kx + b$ ja alapuolista osaa epäyhtälö $y < kx + b$



- **Kahden muuttujan lineaarinen epäyhtälö** voidaan ratkaista graafisesti suoran avulla. Epäyhtälön graafinen ratkaisu on epäyhtälön määrittelemä osa xy-tasoa.

- **Epäyhtälöryhmä** sisältää useita epäyhtälöitä.

- Epäyhtälöryhmän graafinen ratkaisu on se osa tasoa, jossa kaikki epäyhtälöt toteutuvat samanaikaisesti.

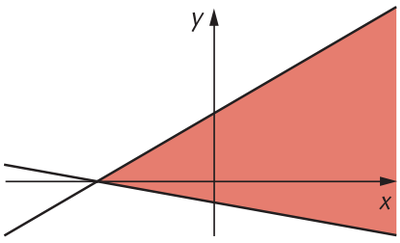


$$\begin{cases} y < kx + b \\ y < mx + c \\ y > nx + d \end{cases}$$

- Alueen reunat kuuluvat mukaan ratkaisuun, jos epäyhtälöissä on mukana yhtäsuuruus.

- Jos epäyhtälöryhmä määrittelee äärelliseen alueen, se on monikulmio.

- Alue voi olla jostakin kohtaa rajoittamaton eli se on ääretön.



Epäyhtälöryhmän ratkaiseminen

- Epäyhtälöryhmän ratkaisussa kannattaa noudattaa seuraavia vaiheita:

  1. Ratkaise epäyhtälöt muuttujan y suhteen. Jos epäyhtälö ei sisällä lainkaan muuttujaa y, se ratkaistaan muuttujan x suhteen.
  2. Jos epäyhtälö kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta kääntyy.
  3. Päättele epäyhtälöistä tasoaluetta rajoittavat suorat ja piirrä ne.
  4. Päättele epäyhtälöiden avulla se osa tasoa, jossa kaikki epäyhtälöt ovat yhtä aikaa voimassa.
  5. Voit tarkistaa ratkaisusi valitsemalla alueen sisältä yhden pisteen. Sijoita pisteen koordinaatit kaikkiin epäyhtälöihin – koordinaattien on toteutettava kaikki epäyhtälöt.

Lineaarinen optimointi

- **Lineaarinen optimointi** on matemaattinen menetelmä, jonka avulla etsitään lineaarisen funktion suurinta tai pienintä arvoa tiettyjen rajoitusehtojen ollessa voimassa.

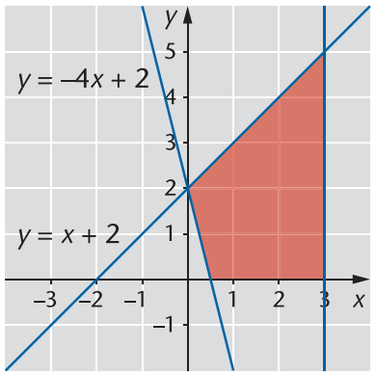
- Optimointitehtävän ratkaisemisessa voit edetä seuraavasti:

  1. Muodosta optimoitava lauseke.
  2. Muodosta rajoitusehdot.
  3. Esitä tilanne graafisesti.
  4. Laske alueen kärkipisteet.
  5. Laske optimiarvo.
  6. Anna vastaus oikeassa muodossa.

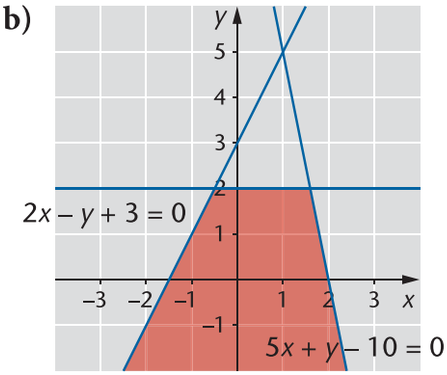
Esimerkki 1

Esitä kuvaan merkitty tasoalue sopivien epäyhtälöiden avulla, kun alueen reunat eivät kuulu mukaan alueeseen.

a)



b)



Ratkaisu

a) Aluetta rajoittavat suorat $y = x + 2$, $y = -4x + 2$, $x = 3$ sekä x-akseli eli $y = 0$. Alue syntyy

- suoran $y = x + 2$ alapuolisesta osasta eli $y < x + 2$
- suoran $y = -4x + 2$ yläpuolisesta osasta eli $y > -4x + 2$
- suoran $x = 3$ vasemmanpuoleisesta osasta eli $x < 3$
- suoran $y = 0$ yläpuolisesta osasta eli $y > 0$.

b) Alue on alhaalta rajoittamaton. Sitä rajoittavat suorat $2x - y + 3 = 0$ (ratkaistussa muodossa $y = 2x + 3$), $5x + y - 10 = 0$ (ratkaistussa muodossa $y = -5x + 10$) ja $y = 2$. Alue syntyy

- suoran $y = 2x + 3$ alapuolisesta osasta eli $y < 2x + 3$
- suoran $y = -5x + 10$ alapuolisesta osasta eli $y < -5x + 10$
- suoran $y = 2$ alapuolisesta osasta eli $y < 2$.

Vastaus

a) $\begin{cases} y < x + 2 \\ y > -4x + 2 \\ x < 3 \\ y > 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y < 2x + 3 \\ y < -5x + 10 \\ y < 2 \end{cases}$

Esimerkki 2

Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \le 4 \\ y \ge 0 \\ y \ge -4x \\ y \ge 3x - 2. \end{cases}$$

Ratkaisu

Aluetta rajoittavat x-akselin suuntainen suora $y = 4$, $y = 0$ eli x-akseli, origon kautta kulkeva suora $y = -4x$ sekä suora $y = 3x - 2$. Koska epäyhtälöissä on yhtäsuuruus, suorat kuuluvat mukaan alueeseen.

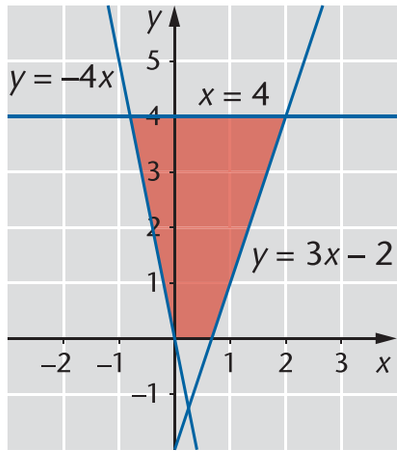
Epäyhtälömerkin suunta määrää, valitaanko alueeseen suoran ylä- vai alapuolinen osa tasoa.

- $y \le 4$ Alue on suoran alapuolelle jäävä osa tasoa.
- $y \ge 0$ Alue on suoran yläpuolelle jäävä osa tasoa.
- $y \ge -4x$ Alue on suoran yläpuolelle jäävä osa tasoa.
- $y \ge 3x - 2$ Alue on suoran yläpuolelle jäävä osa tasoa.

Piirretään suorat koordinaatistoon ja päätellään epäyhtälöiden avulla ratkaisuna oleva alue.

Tarkistetaan päättely valitsemalla alueesta yksi piste, esimerkiksi (0, 3).

Epäyhtälö	Toteuttaako piste epäyhtälön?
$y \le 4$	$3 \le 4$ tosi
$y \ge 0$	$3 \ge 0$ tosi
$y \ge -4x$	$3 \ge -4 \cdot 0 = 0$ tosi
$y \ge 3x - 2$	$3 \ge 3 \cdot 0 - 2 = -2$ tosi



Vastaus

Epäyhtälöryhmän graafinen ratkaisu on kuvan tasoalue. Reunat kuuluvat mukaan alueeseen.

Esimerkki 3

Herne ja parsakaali ovat mainioita ravinto- ja hivenaineiden lähteitä. Yksi kilogramma herneitä sisältää 20 mg rautaa ja 200 mg C-vitamiinia. Sama määrä parsakaalia sisältää 10 mg rautaa ja 1200 mg C-vitamiinia. Ihminen tarvitsee keskimäärin 10 mg rautaa ja 60 mg C-vitamiinia vuorokaudessa. Laadi epäyhtälöt, jotka ilmaisevat, millaisia määriä mainittuja kasviksia tulisi syödä vuorokaudessa, jos ne olisivat ainoita raudan ja C-vitamiinin lähteitä. Esitä epäyhtälöt ratkaistuna toisen muuttujan suhteen.

Ratkaisu

Merkitään herneiden määrää kirjaimella x (kg) ja parsakaalin määrää kirjaimella y (kg). Kootaan tiedot taulukkoon, jonka avulla on helpompi muodostaa tarvittavat epäyhtälöt.

Kasvis	Määrä (kg)	Rautaa (mg)	C-vitamiinia (mg)
herne	x	$20x$	$200x$
parsakaali	y	$10y$	$1200y$

Henkilö saa kasviksista rautaa yhteensä $20x + 10y$. Koska rautaa on saatava vähintään 10 mg, saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned} 20x + 10y &\geq 10 \\ 10y &\geq 10 - 20x \quad |:10 \\ y &\geq 1 - 2x \end{aligned}$$

C-vitamiinia saadaan yhteensä $200x + 1\,200y$. Koska sitä tarvitaan vähintään 60 mg, saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned} 200x + 1200y &\geq 60 \\ 1200y &\geq 60 - 200x \quad |:1200 \\ y &\geq \frac{1}{20} - \frac{1}{6}x \end{aligned}$$

Edellisten epäyhtälöiden lisäksi kasvisten määrät eivät voi olla negatiivisia lukuja, joten $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.

Vastaus

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 1 - 2x \\ y \geq \frac{1}{20} - \frac{1}{6}x \end{cases}$$

Esimerkki 4

Pihaa kunnostetaan liuskekivillä. Kivillä katetaan vähintään 14 m^2 pihaa. Käytettävien kivien yhteismäärä pitää olla vähintään 100, jotta saadaan riittävän harmoninen kokonaisuus. Kunnostuksessa käytetään pihakiveä, jonka ala on keskimäärin 0,2 m^2 ja verhouskiveä, jonka ala on 0,1 m^2. Verhouskiviä, jotka ovat koristeellisempia, halutaan vähintään 40 kpl. Pihakivien hinta on 20 €/m^2 ja verhouskivien 24 €/m^2. Kuinka monta kappaletta kutakin kivilajia on otettava, jotta kustannukset olisivat mahdollisimman pienet? Laske minimikustannusten arvo.

Ratkaisu

Kootaan ensin annetut tiedot taulukkoon. Tällöin rajoitusehtojen ja optimoitavan lausekkeen muodostaminen on helpompaa.

Kivilaatu	Kpl	Ala, jonka kivet kattavat (m^2)	Kustannukset (€)
pihakivi	x	$0{,}2x$	$20 \cdot 0{,}2x = 4x$
verhouskivi	y	$0{,}1y$	$24 \cdot 0{,}1y = 2{,}4y$

Kokonaiskustannuksia kuvaa lauseke $4x + 2{,}4y$.

- Kivien lukumäärät eivät voi olla negatiivisia lukuja, joten

  $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.

- Kivien yhteismäärän oltava vähintään 100, joten

  $x + y \geq 100$.

- Katettava ala on vähintään 14 m^2, joten

  $0{,}2x + 0{,}1y \geq 14$.

- Verhouskiviä halutaan vähintään 40, joten

  $y \geq 40$.

Koska kaikkien näiden epäyhtälöiden on oltava yhtä aikaa voimassa, saadaan epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 40 \\ x + y \geq 100 \\ 0{,}2x + 0{,}1y \geq 14 \end{cases}$$

Ratkaistaan kaksi viimeistä epäyhtälöä muuttujan y suhteen.

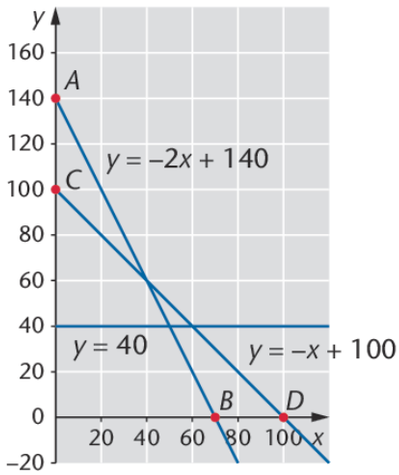
$$0{,}2x + 0{,}1y \geq 14$$
$$0{,}1y \geq 14 - 0{,}2x \quad |:0{,}1$$
$$y \geq 140 - 2x$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 40 \\ y \geq -x + 100 \\ y \geq -2x + 140 \end{cases}$$

Epäyhtälöryhmä määrittelee tasoalueen, jota rajoittavat suorat $x = 0$, $y = 0$, $y = -x + 100$ ja $y = -x + 140$.

Suorien piirtämiseksi lasketaan suorien ja koordinaattiakseleiden leikkauspisteet.

Suora $y = -2x + 140$ leikkaa y-akselin pisteessä $A(0, 140)$.



x-akselin leikkauskohta:

$$-2x + 140 = 0$$
$$-2x = -140 \quad |:(-2)$$
$$x = 70$$

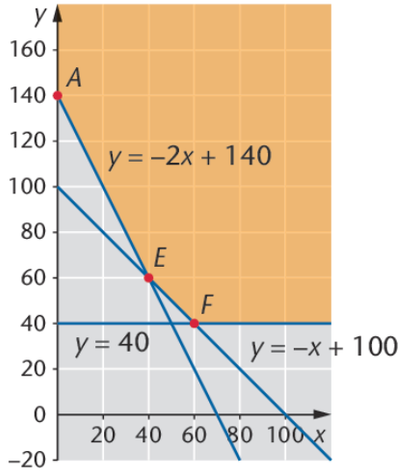
Leikkauspisteenä on $B(70, 0)$.

Suora $y = -x + 100$ leikkaa y-akselin pisteessä $C(0, 100)$.

x-akselin leikkauskohta:

$$-x + 100 = 0$$
$$-x = -100 \quad |:(-1)$$
$$x = 100$$

Leikkauspisteenä on $D(100, 0)$.



Päätellään epäyhtälöiden avulla epäyhtälöryhmää kuvaava tasoalue.

- $x \geq 0$ eli y-akselin vasen puoli
- $y \geq 40$ eli suoran $y = 40$ yläpuolinen osa
- $y \geq -x + 100$ eli suoran $y = -x + 100$ yläpuolinen osa
- $y \geq -2x + 140$ eli suoran $y = -2x + 140$ yläpuolinen osa

Alue on ylhäältä rajoittamaton. Näin kustannukset voivat kasvaa rajatta eikä lausekkeella $4x + 2{,}4y$ ole suurinta arvoa. Pienin arvo löytyy tasoalueen jostain kärkipisteestä A, E tai F.

Piste E on suorien $y = -x + 100$ ja $y = -2x + 140$ leikkauspiste:

$$\begin{cases} y = -x + 100 \\ y = -2x + 140 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x + 100 &= -2x + 140 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Sijoitetaan muuttujan arvo $x = 40$ suoran yhtälöön $y = -x + 100$:

$$y = -40 + 100 = 60$$

Koska $x = 40$ ja $y = 60$, piste $E = (40, 60)$.

Piste F on suorien $y = 40$ ja $y = -x + 100$ leikkauspiste:

$$\begin{cases} y = -x + 100 \\ y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x + 100 &= 40 \\ -x &= -60 \;|:(-1) \\ x &= 60 \end{aligned}$$

$F = (60, 40)$

Sijoitetaan saadut kärkipisteet lausekkeeseen $4x + 2{,}4y$.

Piste	**$4x + 2{,}4y$**
$A(0, 140)$	$4 \cdot 0 + 2{,}4 \cdot 140 = 336$
$E(40, 60)$	$4 \cdot 40 + 2{,}4 \cdot 60 = 304$
$F(60, 40)$	$4 \cdot 60 + 2{,}4 \cdot 40 = 336$

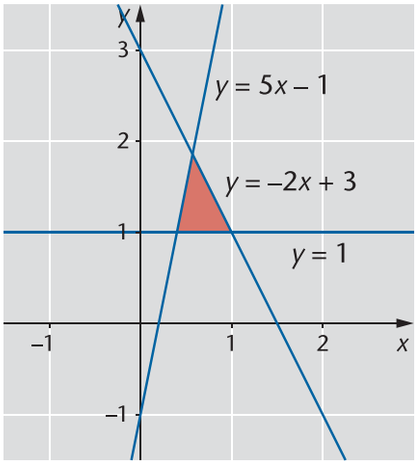
Kustannukset ovat pienimmät pisteessä (40, 60). Laatoitukseen laitetaan siis 40 pihakiveä ja 60 verhouskiveä, jolloin kustannukset ovat 304 €.

Vastaus 40 pihakiveä ja 60 verhouskiveä, kustannukset 304 €

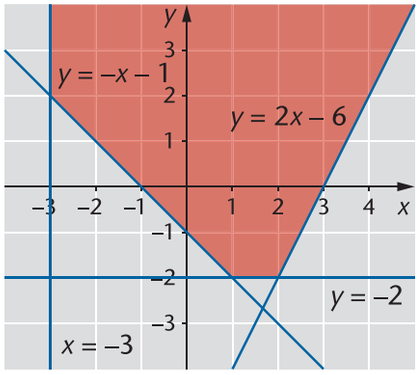
Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

142 Ilmoita kuvaan merkitty tasoalue sopivien epäyhtälöiden avulla.

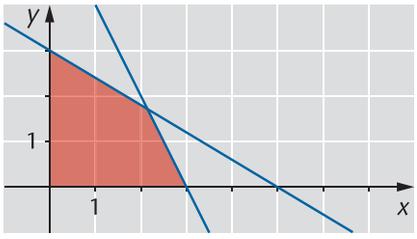


143 Minkä epäyhtälöryhmän graafinen ratkaisu on kuvan tasoalue reunojen kanssa?

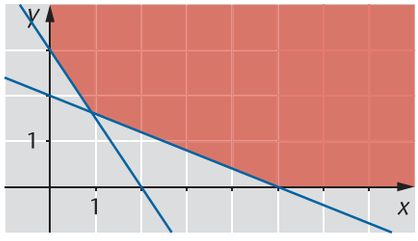


144 Ilmoita kuvan tasoalue epäyhtälöiden avulla.

a)



b)



145 Ratkaise epäyhtälö. Kuvaa ratkaisu koordinaatistossa.

a) $9x - 3y < 6$ **b)** $4x + 8y > -8$

146 Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \geq -3x + 5 \\ y \leq 2x + 5 \\ x \leq 5. \end{cases}$$

147 Janinan kahvilassa myydään lounastuotteita. Janina on hankkinut 20 kg:n erän fetajuustoa ja 30 kg:n erän tomaatteja. Hän valmistaa niistä salaattiannoksia ja piirakoita. Yhteen salaattiannokseen tarvitaan 100 g juustoa ja 200 g tomaatteja. Pieneen piirakkaan tarvitaan 150 g fetajuustoa ja saman verran tomaatteja. Laadi epäyhtälöt, jotka rajoittavat valmistettavien salaattiannosten ja piirakoiden määriä.

148 Kahden eri leikkeleen kilohinnat ja rasvapitoisuudet on koottu seuraavaan taulukkoon.

	Leikkele A	**Leikkele** B
Kilohinta (€/kg)	20	25
Rasva-pitoisuus (%)	16	4

Näistä kahdesta leikkeleestä kootaan leikkelelautanen. Lautasen hinnan on oltava vähintään 4 €. Rasvaa siinä voi olla enintään 30 g. Laadi lautasen koostumusta rajoittavat epäyhtälöt.

149 Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \geq x - 2 \\ 7x + 2y \geq 14 \\ 5x + 4y \leq 28. \end{cases}$$

Anna vastauksena kuvio, johon on merkitty ratkaisujoukko. [S2007, 10]

150 Ratkaise graafisesti epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -y \\ 2y - x \geq 6 \\ 3x + y \geq 3 \end{cases}$$

ja laske syntyneen alueen pinta-ala. [K2003, 9]

151 Suorat $x + y = 8$, $x + 3y = 18$ ja $y - 3 = 0$ rajoittavat kolmion. Piirrä kuvio ja laske kolmion pinta-ala. Muodosta epäyhtälöryhmä, jonka ratkaisuna on piirtämäsi kolmio sivut mukaan lukien. [S2009, 12]

152 Epäyhtälöt
$-2x - y + 4 \geq 0$, $4x + 2y \geq -10$ ja $0 \leq y \leq 3$
rajaavat tasoalueen. Millainen geometrinen kuvio tasoalue on? Laske sen ala.

Tehtäviä laskimen kanssa

153 Mikä on suurin arvo, jonka lauseke $x + y$ saa epäyhtälöiden $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 24$ ja $5x + 3y \leq 30$ määrittelemässä alueessa? Laske alueen kärkipisteiden koordinaatit. Piirrä kuvio. [K2009, 12]

154 Merjalla on punaista poppanan kudetta 7,2 kg ja vihreää kudetta 4,8 kg. Hän kutoo niistä poppanaliinoja kahdella eri mallilla. Malliin *A*, jossa on kirjontaa, kuluu 400 g punaista ja 400 g vihreää kudetta. Malliin *B* kuluu 600 g punaista ja 200 g vihreää kudetta. Torilla mallista *A* maksetaan 100 € ja mallista *B* 55 €. Kuinka monta Merjan pitäisi eri mallisia poppanoita kutoa, että myynnin arvo olisi suurin, jos kaikki menisivät kaupaksi?

155 Levitoimiseen tarvittavassa taikajuomassa on oltava vähintään 20 hyppysellistä jauhettua lepakon siipeä ja vähintään 10 hyppysellistä hämähäkin seittiä. Taikajuomapuodissa on kahta valmissekoitetta Ascensus ja Sursum. Pikarillinen Ascensusta maksaa kaksi kultarahaa, ja siinä on kolme hyppysellistä lepakon siipeä ja kaksi hyppysellistä hämähäkin seittiä. Pikarillinen Sursumia maksaa kolme kultarahaa. Siinä puolestaan on neljä hyppysellistä lepakon siipeä ja yksi hyppysellinen hämähäkin seittiä. Kuinka paljon kumpaakin sekoitetta kannattaa levitoijakokelaan ostaa, jotta hän saisi taikajuoman mahdollisimman edullisesti? [K2012, 11]

156 Eräässä tosi-TV-sarjassa kilpailijoiden tehtävänä on kerätä kulta- ja hopearahoja. Yhteensä niitä saa kerätä enintään 60 kappaletta. Kultarahan arvo on 25 € ja hopearahan arvo 20 €. Rahat täytyy kuljettaa ohuessa muovipussissa, joka kestää kolikoita vain yhden kilogramman verran. Yksi kultaraha painaa 20 grammaa ja hopearaha 10 grammaa. Kuinka monta kulta- ja hopearahaa kilpailijan kannattaa kerätä, jotta saaliin arvo on mahdollisimman suuri? [S2013, 13]

157 Kotileipomo valmistaa kahta luomutuotetta, terveyspullia ja terveyssämpylöitä. Kymmenen terveyspullan taikinaan tarvitaan 300 g luomuvehnäjauhoja ja 150 g luomuohrajauhoja ja kymmenen sämpylän taikinaan 100 g samoja vehnä- ja 400 g ohrajauhoja. Leipomolla on rajallinen määrä jauhoja, 30 kg vehnäjauhoja ja 36 kg ohrajauhoja. Terveyspullan tuotto leipomolle on 0,45 € ja terveyssämpylän 0,25 €. Kuinka paljon kumpaakin tuotetta leipomon tulisi valmistaa, jotta tuotto olisi suurin mahdollinen? Miten käy jauhovaraston, jos valmistetaan vain terveyssämpylöitä? [S2003, 12]

158 Putkosen perhe on autolomalla Ranskassa. Päivän matkaosuus voidaan ajaa joko pikkuteitä tai moottoriteitä pitkin. Moottoritiellä on ajonopeuden ja tietullien vuoksi korkeammat kustannukset, keskimäärin 0,3 €/ km. Vastaavat kustannukset pikkuteillä ovat vain 0,1 €/ km. Toisaalta moottoriteillä matka edistyy nopeammin, keskimäärin 100 km/h. Matkanopeus pikkuteillä on vain 50 km/h. Matkaan Putkoset haluavat käyttää enintään 8 h, mutta toisaalta kustannukset saavat olla enintään 100 €. Kuinka monta kilometriä Putkosten pitää ajaa moottoriteillä ja kuinka monta pikkuteillä, jotta päivän aikana ajettaisiin mahdollisimman pitkä matka?

6 Eksponentiaalinen malli

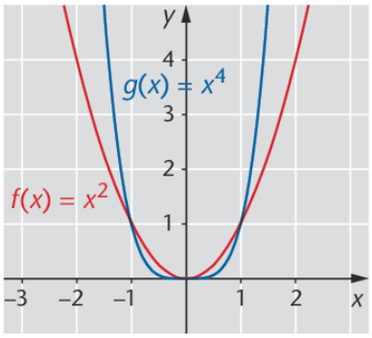
Potenssifunktio

- Potenssifunktio on muotoa

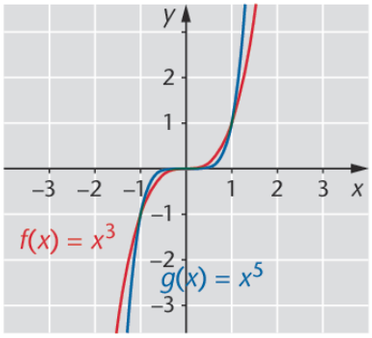
  $f(x) = x^n$, missä x on positiivinen kokonaisluku.

- Potenssifunktiot jaetaan eksponentin mukaan parillisiin ja parittomiin potenssifunktioihin.

Parillinen potenssifunktio:



Pariton potenssifunktio:



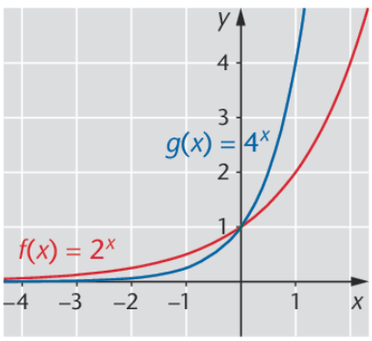
Eksponenttifunktio

- Eksponenttifunktio on muotoa

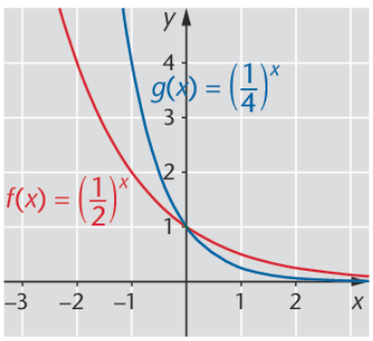
  $f(x) = k^x$, missä kantaluku $k > 0$.

- Eksponenttifunktio kuvaa:

eksponentiaalista kasvua, kun $k > 1$



eksponentiaalista vähenemistä, kun $0 < k < 1$



Potenssiyhtälö

- **Potenssiyhtälö** on yhtälö, joka voidaan sieventää muotoon $x^n = a$, missä n on positiivinen kokonaisluku.
- Potenssiyhtälö ratkaistaan **juuren avulla:**

Muokkaa yhtälö ensin muotoon $x^n = a$

- **Jos *n* on parillinen** ja $a > 0$, niin $x = \sqrt[n]{a}$ tai $x = -\sqrt[n]{a}$.
- **Jos *n* on pariton**, niin $x = \sqrt[n]{a}$.

- Juuri voidaan kirjoittaa murtopotenssin avulla:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Eksponenttiyhtälö

- **Eksponenttiyhtälö** on yhtälö, joka voidaan sieventää muotoon $k^x = a$, missä $k > 0$.
- Eksponenttiyhtälö ratkaistaan joko **samankantaisten potenssien** tai **logaritmin avulla**.

Muokkaa yhtälö ensin muotoon $k^x = a$.

Saman kantaluvun avulla

1. Kirjoita yhtälön molemmat puolet saman kantaluvun potensseina.
2. Merkitse eksponentit yhtä suuriksi.
3. Ratkaise x.

Logaritmin avulla

1. Ota yhtälön kummaltakin puolelta logaritmi **lg.**
2. Sovella eksponentin siirtosääntöä $\lg a^r = r \lg a$.
3. Ratkaise x.

- Logaritmin määritelmä

$$k^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_k y$$

- Kun logaritmin kantalukuna on 10, logaritmi voidaan merkitä lyhyemmin merkinnällä **lg**.
- Kun logaritmin kantalukuna on e (Neperin, luku), on kyseessä **luonnollinen logaritmi**. Luonnollinen logaritmi voidaan merkitä lyhyemmin merkinnällä **ln**.

Esimerkki 1

Ratkaise yhtälö

a) $4x^2 = 36$ **b)** $2x^3 + 16 = 0.$

Ratkaisu

a)
$$4x^2 = 36 \quad |:4$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

b)
$$2x^3 + 16 = 0$$
$$2x^3 = -16 \quad |:2$$
$$x^3 = -8$$
$$x = \sqrt[3]{-8}$$
$$x = -2$$

Vastaus **a)** $x = \pm 3$ **b)** $x = -2$

Esimerkki 2

Ratkaise yhtälö

a) $3^{x+1} = \frac{1}{27}$ **b)** $2^{6x} = 8^{x-1}$ **c)** $5^{2x-1} = 1$

Ratkaisu

a)
$$3^{x+1} = \frac{1}{27}$$
$$3^{x+1} = \frac{1}{3^3}$$
$$3^{x+1} = 3^{-3}$$
$$x + 1 = -3$$
$$x = -4$$

b)
$$2^{6x} = 8^{x-1}$$
$$2^{6x} = (2^3)^{x-1}$$
$$2^{6x} = 2^{3(x-1)}$$
$$6x = 3x - 3$$
$$6x - 3x = -3$$
$$3x = -3 \quad |:3$$
$$x = -1$$

c)
$$5^{2x-1} = 1$$
$$5^{2x-1} = 5^0$$
$$2x - 1 = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Vastaus **a)** $x = -4$ **b)** $x = -1$ **c)** $x = \frac{1}{2}$

Esimerkki 3

Ratkaise yhtälö logaritmin määritelmän avulla.

a) $\log_4 x = 2$ **b)** $\lg\frac{x}{4} = 2$ **c)** $\ln(x+1) = 0$

Ratkaisu

a) Logaritmin määritelmän mukaan

$$\log_k y = x \Leftrightarrow k^x = y$$

Tässä yhtälössä logaritmin kantaluku $k = 4$. Kirjoitetaan yhtälö potenssimuodossa kantaluvun 4 avulla:

$$\begin{aligned}\log_4 x &= 2\\ x &= 4^2\\ x &= 16\end{aligned}$$

b) Logaritmin lg kantalukuna $k = 10$.

$$\begin{aligned}\lg\frac{x}{4} &= 2\\ \log_{10}\frac{x}{4} &= 2\end{aligned}$$

Kirjoitetaan yhtälö potenssimuodossa kantaluvun 10 avulla:

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} &= 10^2\\ \frac{x}{4} &= 100 \mid \cdot 4\\ x &= 400\end{aligned}$$

c) Logaritmin ln kantalukuna on Neperin luku e.

$$\begin{aligned}\ln(x+1) &= 0\\ \log_e(x+1) &= 0\\ x+1 &= e^0\\ x+1 &= 1\\ x &= 0\end{aligned}$$

Vastaus **a)** $x = 16$ **b)** $x = 400$ **c)** $x = 0$

Esimerkki 4

Äänen intensiteettitaso L desibeleinä (dB) lasketaan kaavalla

$$L = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

jossa I on havaittava intensiteetti ja I_0 on intensiteetin vertailuarvo eli kuulokynnyksen intensiteetti. Tämä vertailuarvo $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.

a) Moottoripyörän äänen intensiteetiksi mitataan $1{,}05 \cdot 10^{-5}$ W/m^2. Laske intensiteettitaso desibelin tarkkuudella.

b) Melu heikentää ihmisen kuuloa. Esimerkiksi 100 dB melussa voi oleskella ilman kuulosuojaimia korkeintaan 15 min. Laske 100 dB:n intensiteettitasoa vastaava intensiteetti.

Ratkaisu

a) Tehtävässä kysytään intensiteettitasoa L, kun

- intensiteetti $I = 1{,}05 \cdot 10^{-5}$ W/m^2
- vertailuarvo $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Sijoitetaan annetut tiedot laskukaavaan ja lasketaan lausekkeen arvo.

$$L = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\lg\left(\frac{1{,}05 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 70{,}2118... \approx 70 \text{ (dB)}$$

b) Tehtävässä kysytään äänen intensiteettiä I, kun

- intensiteetin vertailuarvo $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2
- intensiteettitaso $L = 100$ dB.

Sijoitetaan annetut tiedot laskukaavaan ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä I.

$$10\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 100 \quad |:10$$

$$\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 10$$

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^{10} \quad |\cdot 10^{-12}$$

$$I = 10^{10} \cdot 10^{-12}$$

$$I = 10^{-2}$$

$$I = 0{,}01 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Logaritmin määritelmä:

$\log_k y = x \qquad k^x = y$

$k = 10$

$y = \dfrac{I}{10^{-12}}$

$x = 10$

Vastaus

a) 70 dB **b)** 0,01 W/m^2

Esimerkki 5

Hiilidioksidin määrä ilmakehässä on lisääntynyt selvästi esimerkiksi fossiilisten polttoaineiden käytön seurauksena. Vuoden 1750 hiilidioksidin määräksi on laskettu 280 ppmv (tilavuuden miljoonasosaa) ja vastaava luku vuonna 2000 oli 370 ppmv.

a) Kuinka monta prosenttia on ollut vuotuinen CO_2-lisäys, jos kasvun ajatellaan olevan yhtä monta prosenttia joka vuosi?

b) Mikä on ilmakehän hiilidioksidipitoisuus tämän mallin mukaan vuonna 2100?

Ratkaisu

a) Merkitään, että hiilidioksidin CO_2:n määrä k-kertaistuu vuodessa.

- CO_2:n määrä alussa: 280 ppmv
- CO_2:n määrä lopussa: 370 ppmv
- Määrän kasvu tapahtuu $2000 - 1750 = 250$ kertaa.

Saadaan yhtälö:

$$k^{250} \cdot 280 = 370 \quad | :280$$

$$k^{250} = 1{,}3214... \quad | \sqrt[250]{\ }$$

$$k = \pm 1{,}0011154...$$

Koska määrän kasvua kuvaava kerroin on aina positiivinen,

$$k = 1{,}0011154\ldots$$

Vuotuinen CO_2 -lisäys on siis

$$1{,}001115... - 1 = 0{,}001115... \approx 0{,}11\ \%$$

b) Hiilidioksidin määrä tulee vuosittain 1,0011… kertaiseksi.

- CO_2:n määrä alussa: 280 ppmv
- Määrän kasvu tapahtuu $2\,100 - 1\,750 = 350$ kertaa.

Vuonna 2100 CO_2:n määrä on

$$1{,}0011154...^{350} \cdot 280 = 413{,}63... \approx 410\ (\text{ppmv})$$

Vastaus

a) 0,11 % **b)** 410 ppmv

Esimerkki 6

Trooppiset sademetsät ovat yksi maapallon rikkaimmista ekosysteemeistä. Vuonna 1970 noin 1,0 % Amazonin sademetsistä oli tuhoutunut, kun vuonna 2000 tuhoutuneen sademetsän määrä oli 15,0 %.

a) Jos sademetsien tuhoutuminen olisi tällä aikavälillä noudattanut eksponentiaalista mallia, kuinka monta prosenttia sademetsistä olisi tuhoutunut vuosittain?

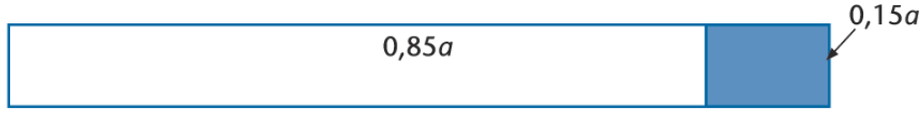
b) Jos sademetsien tuhoutuminen jatkuisi samalla vauhdilla, minä vuonna sademetsiä olisi jäljellä enää 1,0 % alkuperäisestä määrästä?

Ratkaisu

a) Merkitään sademetsien määrää alussa kirjaimella a.

Vuonna 1970 metsistä oli tuhoutunut 1,0 % eli metsiä oli jäljellä $0{,}99a$.

Vuonna 2000 tuhoutuneiden sademetsien määrä oli 15,0 %, joten niitä oli jäljellä $0{,}85a$.



Jos tuhoutuminen noudattaa eksponentiaalista mallia, sademetsiä tuhoutuu joka vuosi yhtä monta prosenttia. Merkitään tätä metsien määrän vuosittaista vähenemistä kuvaavaa muutoskerrointa kirjaimella k.

Tarkasteltava aikaväli on $2000 - 1970 = 30$ vuotta.

Saadaan yhtälö

$$0{,}99a \cdot k^{30} = 0{,}85a \quad |: a \neq 0$$

$$0{,}99a \cdot k^{30} = 0{,}85 \quad |: 0{,}99$$

$$k^{30} = \frac{0{,}85}{0{,}99}$$

$$k = \pm\sqrt[30]{\frac{0{,}85}{0{,}99}}$$

$$k = \pm 0{,}9949\ldots$$

Koska muutoskerroin on aina positiivinen, $k = 0{,}9949\ldots$

Sademetsiä olisi tuhoutunut vuosittain

$$1 - 0{,}9949\ldots = 0{,}005069\ldots \approx 0{,}51\ \%.$$

b) Kun sademetsiä on jäljellä 1,0 %, on niiden määrä $0{,}01a$. Merkitään kysyttyä vuosien määrää kirjaimella n.

Muodostetaan yhtälö, jonka avulla lasketaan, milloin sademetsiä on jäljellä täsmälleen 1,0 %. Ratkaistaan n tästä yhtälöstä.

$$0{,}99a \cdot 0{,}9949\ldots^{n} = 0{,}01a \qquad |:a$$

$$0{,}99 \cdot 0{,}9949\ldots^{n} = 0{,}01 \qquad |:0{,}99$$

$$0{,}9949\ldots^{n} = \frac{0{,}01}{0{,}99}$$

$$\lg 0{,}9949\ldots^{n} = \lg\frac{0{,}01}{0{,}99}$$

$$n\lg 0{,}9949\ldots = \lg\frac{0{,}01}{0{,}99} \qquad |:\lg 0{,}9949\ldots$$

$$n = \frac{\lg\frac{0{,}01}{0{,}99}}{\lg 0{,}9949\ldots} = 904{,}144\ldots$$

Sademetsien määrä saavuttaisi 1,0 prosentin rajan vuoden $1970 + 904 = 2874$ aikana.

Vastaus

a) 0,51 % vuosittain.

b) Sademetsien määrä saavuttaa 1,0 % rajan vuoden 2874 aikana.

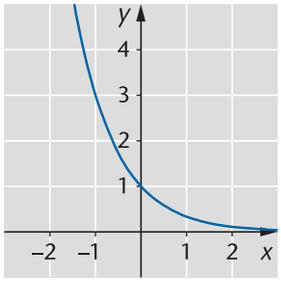
Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

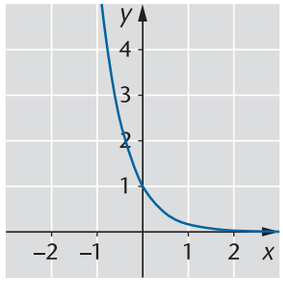
159 Yhdistä oikea funktio ja kuvaaja.

Funktio $f(x)$	Kuvaaja
x^5	
3^x	
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	
x^6	
6^x	
$\left(\frac{1}{6}\right)^x$	

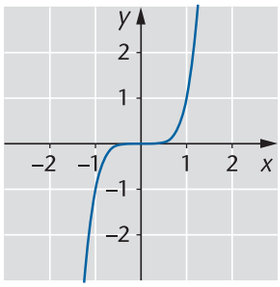
Kuva **A**



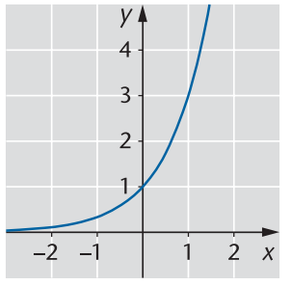
Kuva **B**



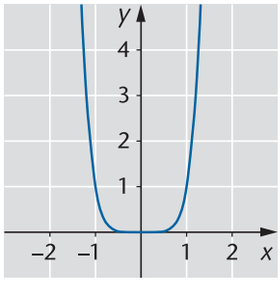
Kuva **C**



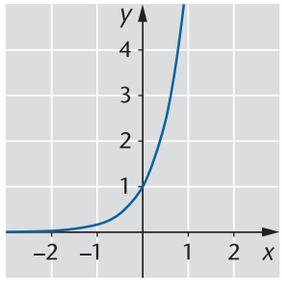
Kuva **D**



Kuva **E**



Kuva **F**



160 Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 - 16 = 0$

b) $x^3 - 27 = 0$

161 Ratkaise yhtälö.

a) $3x^4 - 3 = 0$

b) $4x^3 - 4000 = 0$

162 Ratkaise yhtälö $2x^3 + 250 = 0$.

163 Ratkaise yhtälö.

a) $5^{2x-1} = \frac{1}{25}$

b) $6^{4x-1} - 1 = 0$

c) $4 \cdot 16^x = 1$

164 Ratkaise yhtälö $2^{3x+1} = 32$. [S2012, 3b]

165 **a)** Millä x:n arvolla on $2^x = 1$?

b) Ratkaise yhtälö $2^{x^2-2} = 1$. [K2007, 6]

166 Ratkaise yhtälö $2 \cdot 3^x = 162$. [K2014, 2c]

167 Ratkaise yhtälö $5^{3x-1} = 25^{\frac{x}{2}}$. [K2013, 3b]

168 Ratkaise yhtälö $27^{x-2} = 9^{\frac{x}{2}}$. [K2012, 3b]

169 Ratkaise yhtälö logaritmin määritelmän avulla.

a) $\log_3 2x = 2$

b) $\lg(x-4) = 3$

170 Ratkaise yhtälö $\log_4(3x) = 3$. [S2012, 3c]

Tehtäviä laskimen kanssa

171 Mille positiiviselle luvulle x pätee $x^4 = 17$? Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella. [K2010, 2b]

172 Ratkaise yhtälö $2^x = 1024$. [S2008, 2c]

173 Ratkaise yhtälö. Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

a) $4^x - 6 = 0$

b) $3 \cdot 7^x - 8 = 0$

c) $8 \cdot 3^{x-1} - 2 = 3$

174 Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %? [K2012, 8]

175 Laboratoriossa tutkittiin natriumin radioaktiivista isotooppia Na-11. Natriumnäytteen massa tutkimuksen alussa oli 12,00 g. Alkuainetta oli jäljellä 15 tunnin kuluttua 6,02 g. Jos hajoamisen oletetaan olevan eksponentiaalista, kuinka monta prosenttia natriumista hajoaa yhden tunnin aikana?

176 Laura sijoitti 1 500 euroa rahastoon, jonka vuosikasvu on ollut 30 %. Jos kasvu jatkuu samanlaisena, kuinka monessa vuodessa Lauran sijoituksen arvo ylittää 10 000 euroa?

177 Sanomalehden tilaushinta vuodeksi 2003 oli 194,26 € ja vuodeksi 2009 vastaavasti 249 €. Kuinka monen prosentin vuosittaista hinnankorotusta tämä vastaa, kun oletetaan, että prosentti on jokaisena vuonna ollut sama. [K2010, 14]

178 Maalämpöpumppuja myyvän yrityksen liikevaihto kymmenkertaistui kahdessakymmenessä vuodessa. Kuinka monta prosenttia liikevaihto kasvoi vuodessa, kun vuotuinen kasvuprosentti pysyi koko ajan samana? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella. [S2013, 10]

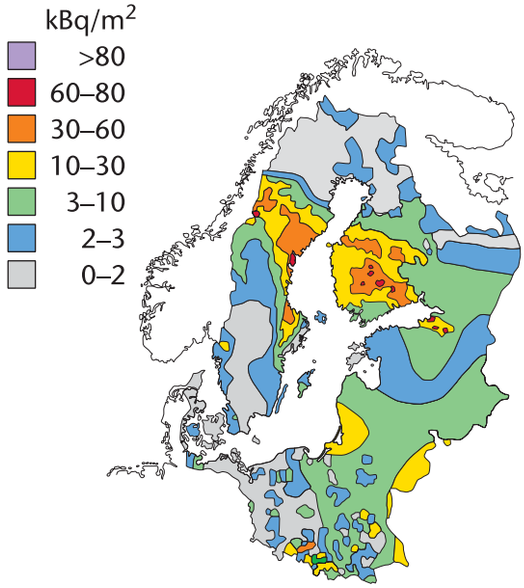
179 Radioaktiivisen aineen määrän havaittiin vuodessa vähentyneen 0,043 %. Määritä aineen puoliintumisaika. [S2006, 12]

180 Vuonna 1990 Helsingissä oli 492 400 asukasta. Vuonna 2000 asukkaita oli 555 474. Kuinka monta prosenttia väkiluku oli noussut keskimäärin vuodessa? Mikä on Helsingin väkiluku vuonna 2015, jos oletetaan, että väestönkasvu jatkuu vuodesta toiseen prosentuaalisesti samansuuruisena? [S2009, 7]

181 Maailman väkiluvun kasvua kuvataan usein eksponentiaalisen mallin avulla. Vuonna 2004 väkiluku oli 6,4 miljardia ja vuonna 2010 noin 6,8 miljardia. Minä vuonna väkiluku ylittää mallin mukaan 10 miljardin rajan? [S2012, 12]

182 Radioaktiivisen näytteen aktiivisuudeksi mitattiin 25,0 kBq ja viisi vuorokautta myöhemmin 16,2 kBq. Laske puoliintumisaika ja näytteen aktiivisuus kymmenen vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta. Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti, ja puoliintumisaika on aika, jonka kuluessa aktiivisuus vähenee puoleen. [K2011, 11]

183 Tšernobylin ydinvoimalaonnettomuuden jälkeen vuonna 1987 cesium-137-laskeuman radioaktiivisuus eräillä alueilla Hämeessä ja KeskiSuomessa oli 78 kBq/m^2. Vuonna 2006 tämä oli laskenut arvoon 50 kBq/m^2. Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti. Minä vuonna alkuperäinen aktiivisuus oli vähentynyt puoleen? Entä neljännekseen? Minä vuonna Vaasan seudun pienempi aktiivisuus on vähentynyt puoleen?



Tšernobylin onnettomuuden cesium-137-laskeuma kesällä 1987 Itämeren ympäristössä.

Lähde: www.stuk.fi (26.4.2009)

[S2010, 12]

184 Saksalainen tähtitieteilijä Johannes Kepler (1571–1630) keksi planeetan etäisyyden ja kiertoajan välisen yhteyden. Planeetan kiertoaikaa Auringon ympäri merkitään symbolilla x ja sen etäisyyttä Auringosta symbolilla y. Alla olevassa taulukossa on viiden Aurinkoa lähinnä olevan planeetan kiertoaika vuosina ja etäisyys astronomisen yksikön avulla lausuttuna.

Planeetta	Merkurius	Venus	Maa	Mars	Jupiter
x	0,241	0,615	1,0	1,881	11,861
$\sqrt[3]{x}$					
y	0,387	0,723	1,0	1,523	5,203
$\sqrt{y}$					

a) Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja täydennä puuttuvat kohdat kolmen desimaalin tarkkuudella.

b) Päättele, mikä on Keplerin kaava etäisyydelle y kiertoajan x avulla lausuttuna.

c) Saturnuksen kiertoaika on 29,457 vuotta. Mikä on sen etäisyys auringosta?

[S2012, 7]

185 Maanjäristyksen voimakkuus M lasketaan kaavalla $1{,}44M = \log_{10} E - 5{,}24$, jossa E on järistyksessä vapautuva energia.

a) Sendain lähellä vuonna 2011 sattuneen järistyksen voimakkuus oli 9,0. Laske järistyksessä vapautuva energia kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

b) Kobessa vuonna 1995 sattuneen järistyksen voimakkuus oli 6,8. Kuinka moninkertainen oli Sendain järistyksessä vapautunut energia Koben järistykseen verrattuna?

[K2012, 10]

186 Korkeushyppääjän eri-ikäisenä saavuttamia tuloksia voidaan vertailla Seppo Sarnan laajasta tilastollisesta aineistosta kehittämän muunnoskaavan

$$T = t + k \lg \frac{a}{35}$$

avulla. Kaavassa t on hyppääjän savuttama todellinen tulos a vuoden ikäisenä, T on muunnettu tulos ja k tilastomateriaaliin perustuva kerroin, jonka arvo on 201,4 cm. Korkeushypyssä tulokset ilmaistaan senttimetrin tarkkuudella.

a) Raimo hyppäsi 19-vuotiaana juniorina tuloksen 196 cm, 23-vuotiaana ennätyksensä 200 cm ja 40-vuotiaana veteraanina tuloksen 175 cm. Aseta nämä tulokset paremmuusjärjestykseen, kun niitä verrataan muunnoskaavan avulla.

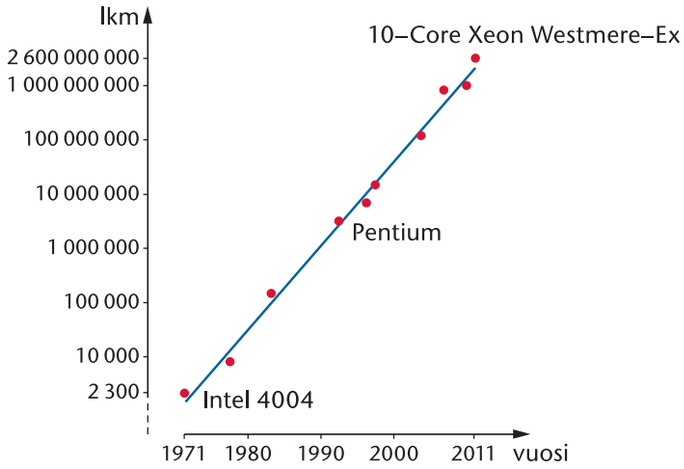
b) Missä iässä hypätty tulos 175 cm on muunnettuna 233 cm? (233 cm oli sisäratojen miesten Suomen ennätys vuoden 2012 alussa.)

[S2013, 12]

187 Transistoreiden lukumäärä $N = N(t)$ on kasvanut alla olevan kuvan mukaisesti. Ajanhetkellä $t = 0$ (vuosi 1971) lukumäärä oli 2 300, ja hetkellä $t = 40$ (vuosi 2011) se oli 2 600 000 000. Lukumäärä noudattaa mallia $N(t) = N(0)e^{at}$.

a) Määritä vakion a kaksidesimaalinen likiarvo näiden tietojen perusteella.

b) Perustele a-kohdan avulla niin sanottu Mooren laki, jonka mukaan transistoreiden lukumäärä kaksinkertaistuu noin kahden vuoden välein.



[K2013, 13]

7 Lukujonot

Lukujono

- Lukujono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ muodostuu joukosta lukuja, jotka on järjestetty peräkkäin määrätyn säännön mukaisesti.
- Lukujonon lukuja sanotaan **termeiksi** tai **jäseniksi**.
- Lukujono on **äärellinen** eli **päättyvä**, jos sen pituus on rajattu. Se on **ääretön** eli **päättymätön**, jos siinä ei ole viimeistä jäsentä.
- **Yleinen jäsen** a_n kertoo säännön, jonka avulla jonon mielivaltainen jäsen voidaan laskea, kun jäsenen **paikka** n jonossa tunnetaan.
- Kun lukujonon $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jäseniä lasketaan yhteen k kappaletta, saadaan summa $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$. Se voidaan merkitä lyhyesti summamerkin avulla:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n$$

Aritmeettinen jono

- Jono on **aritmeettinen**, jos kahden peräkkäisen jäsenen erotus eli **differenssi** (d) on vakio.

$$d = a_{n+1} - a_n$$

- Jonon yleinen jäsen voidaan määritellä ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

- Kun lasketaan yhteen n kappaletta aritmeettisen jonon jäseniä, syntyy **aritmeettinen summa**.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

  - a_1 on summan ensimmäinen yhteenlaskettava.
  - a_n on summan viimeinen yhteenlaskettava.
  - n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

Geometrinen jono

- Jono on **geometrinen**, jos peräkkäisten jäsenten **suhde** q on vakio.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- Jonon yleinen jäsen voidaan määritellä ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Kun lasketaan yhteen n kappaletta geometrisen jonon jäseniä, syntyy **geometrinen summa**.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

  - a_1 on summan ensimmäinen yhteenlaskettava.
  - q on jonon suhdeluku.
  - n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

Esimerkki 1

Aritmeettisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = 2$ ja $a_2 = -1$.

a) Määritä jonon yleinen jäsen a_n.

b) Onko luku -22 tämän jonon jäsen?

c) Laske jonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

Ratkaisu

a) Yleinen jäsen määritellään ensimmäisen jäsenen a_1 ja peräkkäisten jäsenten erotuksen eli differenssin d avulla.

Koska $a_1 = 2$ ja $a_2 = -1$, differenssi $d = a_2 - a_1 = -1 - 2 = -3$.
Lukujonon yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 2 + (n-1)\cdot(-3) \\ &= 2 - 3n + 3 \\ &= 5 - 3n \end{aligned}$$

b) Jos -22 on jonon jäsen, on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = -22$.

$$\begin{aligned} a_n &= -22 \\ 5 - 3n &= -22 \\ -3n &= -27 \quad |:(-3) \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Luku -22 on siis jäsen a_9.

c) Aritmeettinen summa lasketaan kaavalla $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$, missä

- a_n on summan viimeinen yhteenlaskettava
- n on yhteenlaskettavien määrä.

Summan 10. jäsen on $a_{10} = 5 - 3 \cdot 10 = -25$.
Yhteenlaskettavien määrä $n = 10$.

$$S_{10} = \frac{2 + (-25)}{2}\cdot 10 = \frac{-23}{2}\cdot 10 = -11{,}5 \cdot 10 = -115$$

Vastaus

a) $a_n = 5 - 3n$ **b)** $a_9 = -22$ **c)** $S_{10} = -115$

Esimerkki 2

Laske summa $\sum_{n=1}^{8} a_n$, kun jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat

a) $a_1 = 5$, $a_2 = 15$ ja $a_3 = 25$

b) $a_1 = 4$, $a_2 = 12$ ja $a_3 = 36$.

Ratkaisu

a) Jono on aritmeettinen, koska

- $d = a_3 - a_2 = 25 - 15 = 10$ ja
- $d = a_2 - a_1 = 15 - 5 = 10$.

Jonon yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 5 + (n-1) \cdot 10 \\ &= 5 + 10n - 10 \\ &= 10n - 5 \end{aligned}$$

Summassa $\sum_{n=1}^{8} a_n$ lasketaan yhteen jonon kahdeksan ensimmäistä jäsentä.

Viimeinen yhteenlaskettava $a_8 = 10 \cdot 8 - 5 = 75$.

$$\sum_{n=1}^{8} a_n = \sum_{n=1}^{8} (10n - 5) = \frac{5 + 75}{2} \cdot 8 = 320$$

b) Jono on geometrinen, koska

- $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{36}{12} = 3$ ja
- $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{4} = 3$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$.

Geometrinen summa lasketaan kaavalla $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$, missä

- q on jonon suhdeluku
- n on yhteenlaskettavien määrä.

$$\sum_{n=1}^{8} a_n = \sum_{n=1}^{8} (4 \cdot 3^{n-1}) = 4 \cdot \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 13120$$

Vastaus **a)** 320 **b)** 13 120

Esimerkki 3

Kuinka monta jonon a_n jäsentä on laskettava yhteen, jotta summa ylittää miljoonan, kun

a) $a_n = 18n - 12$ **b)** $a_n = 6 \cdot 1{,}8^{n-1}$?

Ratkaisu

a) Jono on aritmeettinen.

- Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 18 \cdot 1 - 12 = 6$.
- Summan viimeinen yhteenlaskettava on $a_n = 18n - 12$.

Summakaavalla $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ saadaan yhtälö, josta ratkaistaan n.

Symbolisella laskimella voidaan ratkaista epäyhtälö $\frac{6+(18n-12)}{2} \cdot n > 1\,000\,000$

$$\frac{6+(18n-12)}{2} \cdot n = 1\,000\,000$$

$$\frac{18n-6}{2} \cdot n = 1\,000\,000 \quad |\cdot 2$$

$$18n^2 - 6n = 2\,000\,000$$

$$18n^2 - 6n - 2\,000\,000 = 0$$

$$n = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-2000000)}}{2 \cdot 18}$$

$$n = \frac{6 \pm \sqrt{144000036}}{36}$$

$$n = 333{,}5\ldots \text{ tai } n = -333{,}1\ldots$$

Summa ylittää miljoonan, kun lasketaan yhteen vähintään 334 jäsentä.

b) Jono on geometrinen. Sijoittamalla summakaavaan suhdeluku $q = 1{,}8$ ja $a_1 = 6$ saadaan

Symbolisella laskimella voidaan ratkaista epäyhtälö $6 \cdot \frac{1-1{,}8^n}{1-1{,}8} > 1\,000\,000$.

$$6 \cdot \frac{1-1{,}8^n}{1-1{,}8} = 1\,000\,000 \quad |:6$$

$$\frac{1-1{,}8^n}{-0{,}8} = \frac{1\,000\,000}{6} \quad |\cdot(-0{,}8)$$

$$1-1{,}8^n = -133\,333{,}33\ldots$$

$$-1{,}8^n = -133\,334{,}33\ldots \quad |:(-1)$$

Logaritmia ei voida ottaa negatiivisesta luvusta.

$$1{,}8^n = 133\,334{,}33\ldots$$

$$\lg 1{,}8^n = \lg 133\,334{,}33\ldots$$

$$n \cdot \lg 1{,}8 = \lg 133\,334{,}33\ldots \quad |:\lg 1{,}8$$

$$n = 20{,}076$$

On siis laskettava yhteen ainakin 21 jonon jäsentä.

Vastaus

a) 334 **b)** 21

Esimerkki 4

Eräästä geometrisesta jonosta tiedetään, että $a_4 = 320$ ja $a_7 = 20\,480$.

a) Määritä jonon suhdeluku.

b) Mikä on jonon yleinen jäsen?

Ratkaisu

a) Merkitään suhdelukua kirjaimella q. Mikä tahansa jonon jäsen voidaan esittää suhdeluvun ja edellisen jäsenen avulla seuraavasti:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Tällöin a_7 voidaan esittää suhdeluvun ja jäsenen a_4 avulla:

$$a_5 = q \cdot a_4$$
$$a_6 = q \cdot a_5 = q \cdot q \cdot a_4 = q^2 \cdot a_4$$
$$a_7 = q \cdot a_6 = q \cdot q \cdot q \cdot a_4 = q^3 \cdot a_4$$

Koska $a_4 = 320$ ja $a_7 = 20\,480$, suhdeluku voidaan ratkaista yhtälön avulla:

Otetaan yhtälön molemmilta puolilta kuutiojuuri.

$$q^3 \cdot 320 = 20\,480 \quad |:320$$
$$q^3 = 64$$
$$q = 4$$

Jonon suhdeluku on 4.

b) Jonon yleisen jäsenen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ määrittämiseen tarvitaan ensimmäinen jäsen.

Jonon neljäs jäsen yleisen jäsenen avulla on $a_4 = a_1 \cdot 4^{4-1}$. Muodostetaan yhtälö, josta a_1 ratkaistaan.

$$320 = a_1 \cdot 4^{4-1}$$
$$a_1 \cdot 4^3 = 320$$
$$64a_1 = 320 \quad |:64$$
$$a_1 = 5$$

Jonon ensimmäinen jäsen on 5 ja jonon suhdeluku on 4, joten yleinen jäsen on $a_n = 5 \cdot 4^{n-1}$.

Vastaus

a) 4 **b)** $a_n = 5 \cdot 4^{n-1}$

Esimerkki 5

Tulitikuista muodostetaan kuvioita, jotka muodostuvat peräkkäisistä neliöistä. Alla on kolme ensimmäistä kuviota.

Tulitikkujen määrät kuvioissa muodostavat aritmeettisen jonon.

a) Kuinka monta tikkua on yhtensä 20 ensimmäisessä kuviossa?

b) Tulitikkupuntissa on yhteensä 800 tikkua. Kuinka monta peräkkäistä kuviota niistä voidaan muodostaa?

Ratkaisu

a) Tulitikkujen määrä kuviossa kasvaa aina kolmella edelliseen kuvioon verrattuna. Jonon 4, 7, 10, … differenssi $d = 3$.
Jonon yleinen jäsen

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 1$$

Tällöin $a_{20} = 3 \cdot 20 + 1 = 61$.

Kahdenkymmenen ensimmäisen kuvion tulitikkujen määrä saadaan summakaavalla.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{4+61}{2} \cdot 20 = 650$$

b) Rakennetaan tulitikuista yhteensä n kuviota. Viimeisessä kuviossa on siis $3n + 1$ tikkua. Summakaavalla saadaan yhtälö, josta voidaan ratkaista n, kun tikkuja on yhteensä 800.

$$\frac{4+(3n+1)}{2} \cdot n = 800 \quad | \cdot 2$$

$$(3n+5)n = 1600$$

$$3n^2 + 5n - 1600 = 0$$

$$n = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1600)}}{2 \cdot 3}$$

$$n = 22{,}27\ldots \text{ (tai } n = -23{,}94\ldots)$$

$a_{22} = 3 \cdot 22 + 1 = 67$

$S_{22} = \frac{4+67}{2} \cdot 22 = 781$

$a_{23} = 3 \cdot 23 + 1 = 70$

$S_{22} = \frac{4+70}{2} \cdot 23 = 851$

Kuvioita voidaan valmistaa enintään 22.

Vastaus

a) 650 **b)** 22 kuviota

Esimerkki 6

Öljyn käyttö energianlähteenä on tyypillinen esimerkki kertakäyttöisestä uusiutumattomasta luonnonvarasta. Vuonna 1900 maailmassa käytettiin öljyä päivässä noin 730 000 barrelia (1 barreli = 0,1589873 m^3). Jos käytetyn öljyn määrä olisi kasvanut 10,8 % vuosittain, niin minä vuonna öljyä oli käytetty yhteensä yli 800 miljoonaa barrelia?

Ratkaisu

Öljyn vuosittaiset käyttömäärät muodostavat geometrisen lukujonon. Merkitään lukujonon suhdelukua kirjaimella q. Lukujonon ensimmäinen jäsen on 730 000 (barrelia).

Muodostetaan yhtälö summakaavan avulla.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$730\,000 \cdot \frac{1-1{,}108^n}{1-1{,}108} = 800\,000\,000 \;|:730\,000$$

$$\frac{1-1{,}108^n}{-0{,}108} = 1095{,}89... \;|\cdot(-0{,}108)$$

$$1-1{,}108^n = -118{,}35...$$

$$-1{,}108^n = -119{,}35... \;|\cdot(-1)$$

Logaritmia ei voida ottaa negatiivisesta luvusta.

$$1{,}108^n = 119{,}35...$$

$$\lg 1{,}108^n = \lg 119{,}35...$$

$$n \cdot \lg 1{,}108 = \lg 119{,}35... \;|:\lg 1{,}108$$

$$n = \frac{\lg 119{,}35...}{\lg 1{,}108}$$

$$n = 46{,}62...$$

$$n \approx 47$$

Öljyn määrä ylitti 800 miljoonan barrelin rajan vuonna $1900 + 47 = 1947$.

Vastaus

Vuonna 1947

Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

188 Aritmeettisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = 4$ ja $a_2 = 7$.
a) Määritä jonon yleinen jäsen.
b) Onko luku 30 jäsen tässä jonossa?
c) Laske jonon seitsemän ensimmäisen jäsenen summa.

189 Määritä geometrisen lukujonon $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$ kolmas termi. [K2007, 2c]

190 Mikä on aritmeettisen lukujonon1, 4, … kymmenes termi? [S2007, 2c]

191 Aritmeettiselle jonolle $a_5 = -29$ ja $a_8 = -47$. Määritä jonon differenssi ja yleinen jäsen.

192 Jonon a_n yleinen jäsen määritellään seuraavasti: $a_n = 2(a_{n-1} + 2a_{n-2})$, $a_1 = 3$ ja $a_2 = 4$. Laske jäsenet a_3, a_4 ja a_5.

193 Aritmeettisen jonon yleinen jäsen on $a_n = 1 + 4n$. Laske summa

a) $\sum_{n=0}^{6} a_n$ **b)** $\sum_{n=3}^{12} a_n$.

194 Eräälle jonolle $a_1 = 10$ ja $a_2 = 2$. Määritä jonon yleinen jäsen, kun jono on
a) aritmeettinen
b) geometrinen.

195 Geometrisen jonon suhdeluku on $\sqrt{2}$. Jonon ensimmäinen jäsen on 2. Määritä jonon seitsemäs jäsen.

196 Aritmeettisen jonon yleinen jäsen on $a_n = kn - 2$. Määritä vakio k siten, että jonon kymmenes jäsen on 100.

197 Jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = k$, $a_2 = 2k - 3$ ja $a_3 = 24$. Määritä k siten, että jono on aritmeettinen.

198 Määritä geometriselle jonolle 1, k, $k + 2$, …vakio k.

199 Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen termi on 1 ja viides on 3. Mikä on jonon kymmenes termi? [S2010, 2c]

Tehtäviä laskimen kanssa

200 Laske summa $\sum_{n=1}^{25} a_n$, kun jono on

a) 100, 80, 60, …

b) 2, 8, 32, …

Anna kohdan b vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

201 Laske summat

a) $\sum_{n=0}^{22}(3+4n)$

b) $\sum_{n=2}^{15}(-3)^n$ [S2012, 5]

202 Kuinka monta jonon a_n jäsenistä on pienempiä kuin 1000, kun

a) $a_n = 12n + 15$

b) $a_n = 5 \cdot 1{,}2^{n-1}$?

203 Kuinka monta jonon a_n jäsentä voi enintään laskea yhteen, jotta summa ei ylitä 10 000, kun

a) $a_n = 7n - 5$

b) $a_n = 0{,}5 \cdot 4^{n-1}$?

204 Lukujonossa (a_n) on

$a_1 = 2$ ja $a_2 = \frac{12}{5}$.

Määritä jonon sadan ensimmäisen termin summa, kun jono on

a) aritmeettinen

b) geometrinen. Anna tämän kohdan vastaus miljoonan tarkkuudella. [K2013, 11]

205 Ihmisen toiminnan seurauksena maapallon keskilämpötila on kohonnut 0,6 °C kuluneen 140 vuoden aikana. Helsingin keskilämpötilaksi arvioidaan nykyisin 6,0 °C. Tarkastele Helsingin keskilämpötilan kehittymistä mallintamalla lämpenemistä aritmeettisen jonon avulla. Laske mallin avulla, kuinka monen vuoden kuluttua Helsingin keskilämpötila ylittää 10,0 °C.

206 Yrityksen liikevoitto vuonna 2010 oli 250 000 €. Yritys on asettanut tavoitteekseen nostaa voittoa joka vuosi 15 %. Vuotuiset voitot muodostavat geometrisen jonon.

a) Määritä jonon yleinen jäsen ja laske sen avulla yrityksen liikevoitto vuonna 2018.

b) Kuinka monen vuoden kuluttua liikevoitto ylittää 2,0 miljoonaa euroa?

207 Kaivosyhtiö louhi vuoden ensimmäisen kuukauden aikana 14 tonnia malmia. Tuotantoa tehostetaan nostamalla malmintuotannon määrää 5 % joka kuukausi loppuvuoden ajan. Kuinka paljon kyseisen vuoden aikana saadaan malmia?

208 Kesämökkirakentaminen on vähentynyt merkittävästi 1990-luvun alkuun verrattuna. 1990-luvun alussa valmistui vuosittain 8 000 uutta mökkiä, viime vuosina enää noin puolet tästä. Suomessa oli vuoden 2004 lopussa 469 400 kesämökkiä. Jos mökkien määrä lisääntyy vuosittain 4 100 kpl, niin

a) montako kesämökkiä on vuonna 2015.

b) minä vuonna mökkien määrä ylittää 600 000?

209 Henkilö lähettää sähköpostin kahdelle ystävälleen. Kumpikin näistä lähettää saman viestin 10 minuutin kuluttua edelleen kahdelle uudelle henkilölle, jotka toimivat samoin. Tilanne toistuu kunkin saajan kohdalla aina samalla tavalla, eikä kukaan saa kyseistä sähköpostia toista kertaa. Kuinka kauan kestää, että 20 000 henkilöä on saanut sähköpostin? Anna vastaus 10 minuutin tarkkuudella. [K2012, 7]

210 Levykauppa on tilannut suositun yhtyeen uutuuslevyä 750 kappaletta. Levyä myydään ensimmäisellä viikolla 120. Levyn myynti laskee joka viikko 10 levyllä. Kuinka kauan kauppiaan levyvarasto riittää?

211 Luonnon monimuotoisuus on rikkaus, jota pitää suojella. Maapallolla elää arviolta 14 miljoonaa erilaista lajia vaikka vain 1,7 miljoonaa lajia on tieteellisesti kuvattu. Oletetaan, että tieteellisesti kuvattujen lajien määrä kasvaisi 5 % vuosittain.

a) Kuinka paljon lajeja olisi tieteellisesti kuvattu 12 vuoden kuluttua?

b) Kuinka monta vuotta tällä vauhdilla kuluisi, jotta kaikki 14 miljoonaa lajia olisi kuvattu tieteellisesti?

212 Lukujonon ensimmäinen termi on 2, ja jonon kukin seuraava termi on aina 5 % suurempi kuin edellinen termi. Muodosta jonon n:nnen termin lauseke. Tutki tämän avulla, kuinka moni jonon termi on pienempi kuin 1000 miljoonaa. Laske näiden termien summa kolmen numeron tarkkuudella. [S2008, 10]

213 Laske lukujen 1 000 ja 2 000 välissä olevien 13:lla jaollisten lukujen summa. [S2011, 13]

214 Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 10 ja toinen termi 12. Geometrisen jonon ensimmäinen termi on 2 ja suhdeluku $q = 21/20$. Monennestako termistä lähtien geometrisen jonon termi on suurempi kuin vastaava aritmeettisen jonon termi? Muodosta tarvittava epäyhtälö ja etsi sille ratkaisu kokeilemalla. [K2011, 13]

215 Djoser (hallitsi 2667–2648 eaa.) suunnitteli porraspyramidia, jossa on päällekkäin 100 suorakulmaista neliöpohjaista särmiötä niin, että kaikilla on sama korkeus ja jokaisen pohjasärmä on 10 % lyhyempi kuin alla olevan pohjasärmä. Alimmaisen särmiön tilavuus on 10 000 m^3. Määritä tällaisen porraspyramidin tilavuus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella. [K2012, 9]

216 Pyramidihuijari avaa pankkitilin ja siirtää ensimmäisessä vaiheessa tilille 100 €. Tämän jälkeen hän houkuttelee mukaan kolme sijoittajaa, joista jokainen siirtää toisessa vaiheessa huijarin tilille 100 €. Kolmannessa vaiheessa kukin näistä kolmesta houkuttelee edelleen mukaan kolme uutta sijoittajaa, joista jokainen siirtää 100 € huijarin tilille. Huijaus jatkuu saman kaavan mukaisesti. Kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva summa ylittää Suomen valtion vuoden 2013 talousarvion, joka on 54,1 miljardia euroa? [K2014, 8]

217 Postimyyntiliike pyrkii saamaan lisää asiakkaita lupaamalla lahjan asiakkaalleen, joka hankkii kaksi uutta asiakasta. Liisa haluaa lahjan ja ilmoittaa kaksi ystävänsä, jotka puolestaan hankkivat kukin kaksi uutta asiakasta jne. Oletetaan, että jokaiseen uusien asiakkaiden hankkimiskierrokseen kuluu aikaa viikko eikä entisiä asiakkaita saa pyytää uudelleen. Kuinka monta uutta asiakasta tällä tavalla olisi saatu kokoon viidessä viikossa? Muodosta lauseke uusien asiakkaiden määrälle n viikon kuluttua. Kuinka monta viikkoa menisi siihen, että näin hankittuja uusia asiakkaita olisi yli 10 000? [S2009, 11]

218 Mauri on ottanut asuntolainaa 81 600 euroa 4,2 prosentin korolla. Hän lyhentää sitä vuosittain 4 800 euroa ja maksaa samalla siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon korkoa hän maksaa toisen vuoden lopussa? Kuinka monta vuotta lainan takaisinmaksu kestää? Kuinka paljon korkoa Mauri maksaa kaiken kaikkiaan? [S2009, 15]

219 Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 1, viimeinen termi on 61, ja jonon termien summa on 961. Mikä on jonon toinen termi? [K2009, 13]

220 Talletustilin vuosikorko on 1,50 prosenttia, ja korkotuotosta peritään vuosittain 29 prosentin lähdevero. Tiliä avattaessa talletetaan 1 000 €, eikä muita talletuksia tehdä.

a) Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenen vuoden kuluttua, kun korko liitetään pääomaan vuoden välein?

b) Monenko vuoden kuluttua talletus on kaksinkertaistunut? [K2009, 14]

221 Ryöstöyrityksen keskeydyttyä Arska pinkaisi poliisia pakoon ja sai 200 metrin etumatkan. Kun poliisi oli juossut tämän 200 metriä, Arskalla oli vielä etumatkaa 180 metriä. Kun poliisi oli juossut tämän, Arskan etumatka oli jälleen kutistunut kymmenesosalla. Takaa-ajo jatkui samalla tavoin. Saiko poliisi Arskan kiinni? Jos sai, niin kuinka pitkän matkan juostuaan poliisi ulottui tarttumaan Arskaan? Poliisin käden pituudeksi oletetaan puoli metriä. [S2010, 11]

222 Vanhassa tarinassa shakkilaudan 64 ruudulle sijoitetaan vehnänjyviä: ensimmäiselle ruudulle yksi, toiselle kaksi, kolmannelle neljä jne. Seuraavalla ruudulla on aina edellisen ruudun määrä kaksinkertaisena. Kuinka monta ruutua voidaan täyttää Suomen vuotuisella 700 miljoonan kilogramman vehnäsadolla, jos oletetaan, että yksi vehnänjyvä painaa 25 mg? [S2007, 9]

223 Lukujonon seuraava termi a_{n+1} lasketaan edellisen termin a_n avulla kaavan

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

mukaisesti. Laske desimaalilukuina riittävällä tarkkuudella lukujonon termit a_1, a_2, a_3 ja a_4, kun **a)** $a_0 = 3$ ja **b)** $a_0 = 8$:
Laske molemmissa tapauksissa, kuinka monta prosenttia termi a_4 poikkeaa luvusta $\sqrt{2}$. [K2010, 11]

224 Eräs menetelmä luvun $\sqrt[3]{a}$ likiarvojen laskemiseksi perustuu kaavaan

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{(x_n)^2}\right),$$

kun $n = 1,2, \ldots$ ja $x_1 = 1$. Tarkastellaan kyseistä jonoa $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, kun $a = 9$. Millä indeksin n arvolla näin lasketut likiarvot toteuttavat ensimmäisen kerran seuraavan ehdon: lukujen x_n ja x_{n+1} seitsemän ensimmäistä desimaalia ovat samat? [K2014, 11]

225 Leonardo Pisano (1170–1250), kutsumanimeltään Fibonacci, määritteli noin vuonna 1210 lukujonon (f_n) kaavoilla

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \; n = 1, 2, \ldots$$

a) Määritä luvut $f_3, f_4, \ldots, f_{10}$.

b) Kreikkalaiset kutsuivat lukua

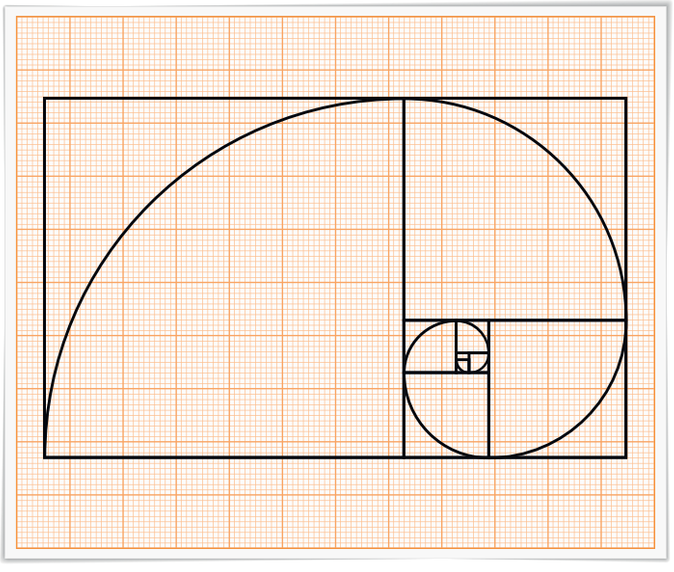
$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1{,}618034$$

kultaiseksi leikkaukseksi. Sen avulla saadaan Fibonaccin luvuille kaava

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right), \; n = 1, 2, \ldots$$

Näytä, että kaava on oikea, kun $n = 1$ ja $n = 2$.

c) Näytä, että yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuret ovat φ ja $-\frac{1}{\varphi}$. [K2012, 12]

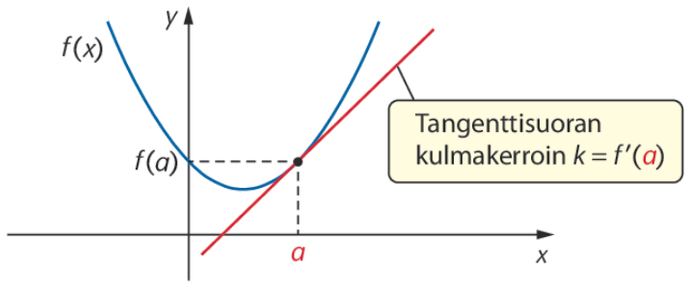


8 Funktion analysoiminen

Derivaatta

- **Funktion derivaatta** kohdassa $x = \boldsymbol{a}$ kertoo funktion kuvaajalle kohtaan $x = \boldsymbol{a}$ piirretyn **tangenttisuoran kulmakertoimen**.

- Tangenttisuoran avulla voidaan kuvata funktion hetkellistä **muutosnopeutta** kohdassa $x = \boldsymbol{a}$.



- Kohtaan $x = a$ piirretyn **tangenttisuoran** yhtälö on muotoa

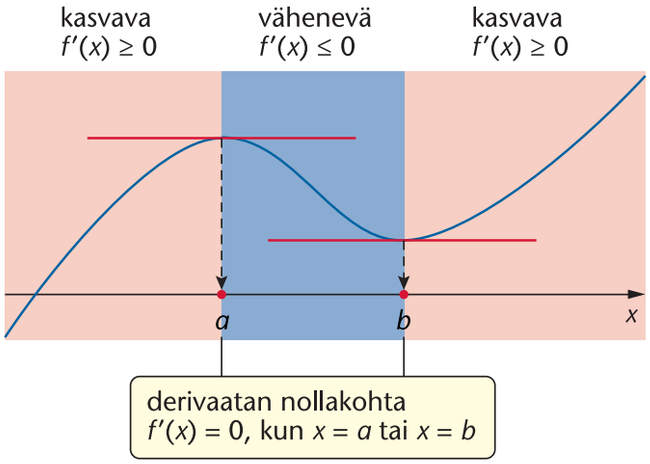
$y - y_0 = k(x - x_0)$ eli $y - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(x - \boldsymbol{a})$

- Funktion derivaatta lasketaan derivointisääntöjen ja -kaavojen avulla

Potenssin derivaatta	$Dx^n = nx^{n-1}$ **Huom!** $Dx = 1$
Vakion derivaatta	$Dc = 0$, c on vakio
Vakion siirtosääntö	$D(cf) = cDf$
Summan derivaatta	$D(f + g) = Df + Dg$

Funktion kulku

- Funktion kulkua tarkastellaan **derivaatan merkin** avulla.

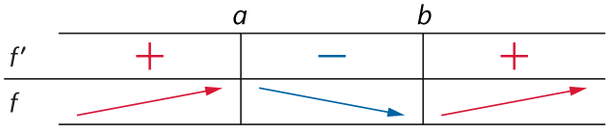


- Funktio on **kasvava**, kun
  - muuttujan arvon kasvaessa funktion arvot kasvavat tai pysyvät samana
  - funktion kuvaajalle piirretyt tangenttisuorat ovat nousevia
  - funktion derivaatta $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$

- Funktio on **vähenevä**, kun
  - muuttujan arvon kasvaessa funktion arvot pienenevät tai pysyvät samana
  - funktion kuvaajalle piirretyt tangenttisuorat ovat laskevia
  - funktion derivaatta $\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$

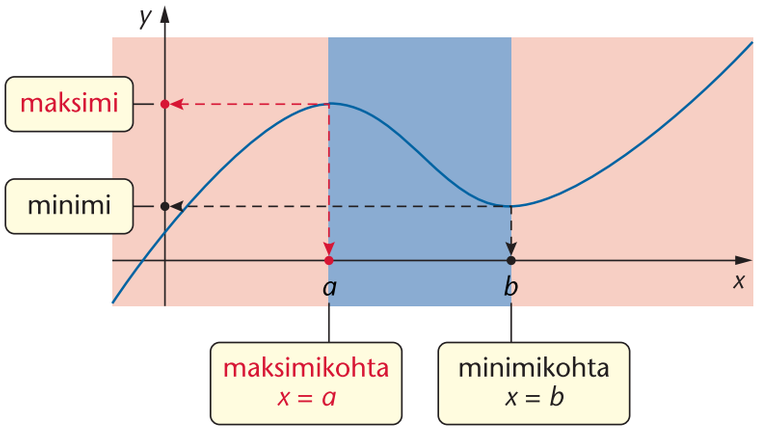
- **Derivaatan nollakohdassa**
  - $f'(x) = 0$
  - funktion kuvaajalle piirretty tangenttisuora on vaakasuora
  - jatkuva funktio voi vaihtaa kulkusuuntaansa

- Derivaatan merkkiä ja funktion kulkua kuvataan usein **merkki-** ja **kulkukaavion** avulla



Ääriarvo ja ääriarvokohdat

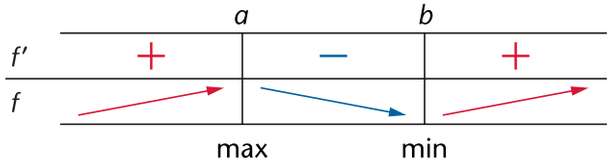
- Sitä muuttujan x arvoa, jossa funktio $f(x)$ saa paikallisesti pienimmän tai suurimman arvonsa kutsutaan funktion **ääriarvokohdaksi**.
  - Jos funktio saa kohdassa paikallisesti pienimmän arvonsa, ääriarvokohta on **minimikohta**.
  - Jos funktio saa kohdassa paikallisesti suurimman arvonsa, ääriarvokohta on **maksimikohta**.



- Mahdolliset ääriarvokohdat löytyvät yleensä derivaatan nollakohdista.

- Funktion arvoja ääriarvokohdissa kutsutaan **ääriarvoiksi**.
  - Minimikohdassa ääriarvo on **minimi**.
  - Maksimikohdassa ääriarvo on **maksimi**.

- Ääriarvokohdat sekä ääriarvojen luonne (maksimi, minimi) perustellaan merkki- ja kulkukaavion avulla.



- Suljetulla välillä jatkuvalle funktiolle on olemassa **suurin** ja **pienin arvo**. Suurin ja pienin arvo löytyy
  - derivaatan nollakohdasta tai
  - välin päätepisteistä.

- Rajoittamattomalla välillä funktiolla ei välttämättä ole suurinta eikä pienintä arvoa.

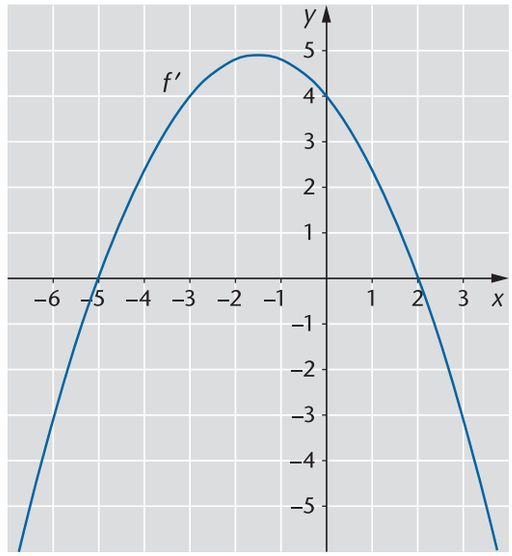
Esimerkki 1

Koordinaatistoon on piirretty funktion f derivaatan kuvaaja f'. Määritä derivaatan kuvaajan avulla

a) $f'(-6)$. Onko funktio f kasvava vai vähenevä kohdassa $x = -6$?

b) funktion f ääriarvokohdat.

c) millä muuttujan x arvoilla funktio f on vähenevä.



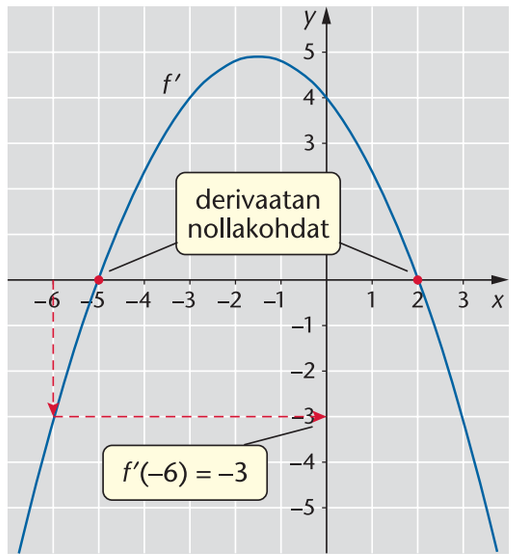
Ratkaisu

a) Kun $x = -6$, derivaatan kuvaajan perusteella

$$f'(-6) = -3.$$

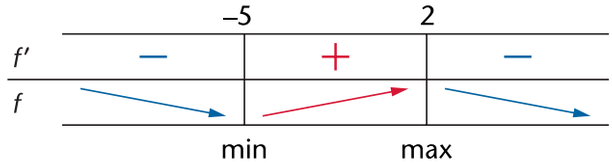
Koska derivaatan arvo on negatiivinen kohdassa $x = -6$, funktio f on tällöin vähenevä.

b) Funktion mahdolliset ääriarvokohdat löytyvät derivaatan nollakohdista.



Derivaatan nollakohdissa derivaatan kuvaaja leikkaa x-akselin, joten $f'(x) = 0$, kun $x = -5$ tai $x = 2$.

Piirretään derivaatan kuvaajan avulla derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio ääriarvojen luonteen selvittämiseksi.



Funktion minimikohta $x = -5$ ja maksimikohta $x = 2$.

c) Funktio on vähenevä, kun $f'(x) \leq 0$ eli kun $x \leq -5$ tai $x \geq 2$.

Vastaus

a) $f'(-6) = -3$, funktio on vähenevä.
b) Minimikohta on $x = -5$ ja maksimikohta $x = 2$.
c) Funktio f on vähenevä, kun $x \leq -5$ tai $x \geq 2$.

Esimerkki 2

Olkoon $f(x) = (2x + 3)(x - 1)$.

a) Määritä funktion derivaatta.

b) Laske derivaatan arvo kohdassa $x = 1$.

c) Millä muuttujan x arvolla derivaatta saa arvon -7?

d) Laske derivaatan nollakohta.

Ratkaisu

a) Ennen derivaatan määrittämistä funktion lausekkeesta on poistettava sulut.

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+3)(x-1) \\ &= 2x^2 - 2x + 3x - 3 \\ &= 2x^2 + x - 3 \end{aligned}$$

Funktion $f(x)$ derivaatta on

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(2x^2 + x - 3\right) \\ &= 2 \cdot 2x + 1 \\ &= 4x + 1 \end{aligned}$$

b) Sijoitetaan $x = 1$ derivaatan lausekkeeseen

$$f'(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$$

c) Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = -7$.

$$\begin{aligned} 4x + 1 &= -7 \\ 4x &= -8 \quad \vert : 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

d) Derivaatan nollakohdassa $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 4x + 1 &= 0 \\ 4x &= -1 \quad \vert : 4 \\ x &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vastaus

a) $f'(x) = 4x + 1$ **b)** $f'(1) = 5$

c) $x = -2$ **d)** $x = -\frac{1}{4}$

Esimerkki 3

Tarkastellaan funktiota $f(x) = -3x^2 + 2x - 5$.

a) Funktion f kuvaajalle piirretään tangentti kohtaan $x = 1$. Määritä tämän tangentin yhtälö.

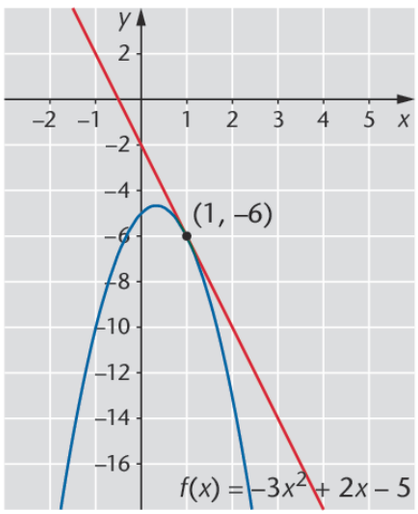
b) Millä muuttujan x arvoilla funktio f on kasvava?

Ratkaisu

a) Tangentin kulmakerroin saadaan derivaatan avulla, joten muodostetaan ensin funktion derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{D}\left(-3x^2 + 2x - 5\right) \\ &= -3 \cdot 2x + 2 \\ &= -6x + 2 \end{aligned}$$

Tangenttisuoran kulmakerroin $k = f'(1) = -6 \cdot 1 + 2 = -4$.



Funktion arvo tangenttisuoran sivuamiskohdassa $x = 1$ kertoo tangenttisuoralla olevan pisteen y-koordinaatin.

$$f(1) = -3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = -3 + 2 - 5 = -6$$

Tangenttisuora kulkee siis pisteen $(1, -6)$ kautta.
Tangenttisuoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - (-6) &= -4(x - 1) \\ y + 6 &= -4x + 4 \\ y &= -4x - 2 \end{aligned}$$

Suora kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta ja sen kulmakerroin on k.
Suoran yhtälö on
$y - y_0 = k(x - x_0)$

b) Funktio on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} -6x + 2 &\geq 0 \\ -6x &\geq -2 \quad |:(-6) \\ x &\leq \frac{-2}{-6} \\ x &\leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vastaus

a) $y = -4x - 2$ **b)** Funktio on kasvava, kun $x \leq \frac{1}{3}$.

Esimerkki 4

Tarkastellaan funktiota $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

a) Määritä funktion ääriarvokohta sekä ääriarvo.

b) Määritä funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 4]$.

c) Piirrä funktion kuvaaja.

Ratkaisu

a) Määritetään funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} - 5 = 4x - 5$$

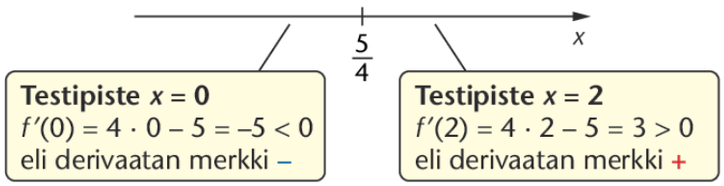
Derivaatta on nolla, kun

$$4x - 5 = 0$$
$$4x = 5 \quad |:4$$
$$x = \frac{5}{4}.$$

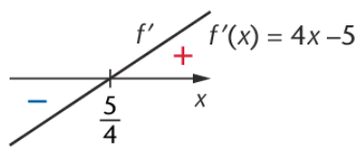
- Funktio on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$.
- Funktio on vähenevä, kun $f'(x) \leq 0$.

Ääriarvokohtia varten tarvitaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.
Derivaatan merkki voidaan selvittää kahdella eri tavalla.

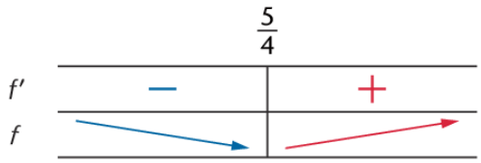
Tapa 1
Testipisteiden avulla



Tapa 2
Derivaatan kuvaajan avulla



Näiden perusteella voidaan laatia derivaatalle merkkikaavio ja funktiolle kulkukaavio.



Funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ ainoa ääriarvokohta on $x = \frac{5}{4}$.

Kulkukaavion perusteella se on minimikohta.

Vastaava ääriarvo eli minimi: $f\left(\frac{5}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right) - 3 = -6\frac{1}{8}$

b) Derivaatan nollakohta sijaitsee tarkasteltavalla välillä $[-1, 4]$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä sekä derivaatan nollakohdassa.

Jatkuva funktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -6\frac{1}{8}$$

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^2 - 5\cdot(-1) - 3 = 4$$

$$f(4) = 2\cdot 4^2 - 5\cdot 4 - 3 = 9$$

Suurin arvo välillä $[-1, 4]$ on 9 ja pienin arvo $-6\frac{1}{8}$.

c) Lasketaan muutamia arvoja funktiolle $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

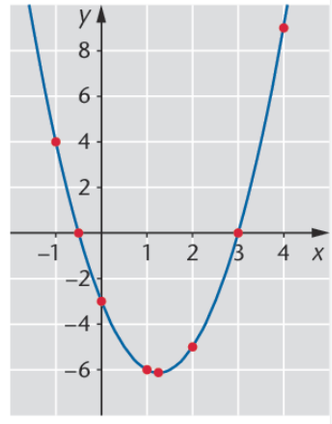
x	$f(x) = 2x^2 - 5x - 3$	(x, y)
-1	$f(-1) = 2\cdot(-1)^2 - 5\cdot(-1) - 3 = 4$	$(-1, 4)$
$-\frac{1}{2}$	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
0	$f(0) = 2\cdot 0^2 - 5\cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
1	$f(1) = 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 - 3 = -6$	$(1, -6)$
$\frac{5}{4}$	$f\left(\frac{5}{4}\right) = -6\frac{1}{8}$	$\left(\frac{5}{4}, -6\frac{1}{8}\right)$
2	$f(2) = -5$	$(2, -5)$
3	$f(3) = 2\cdot 3^2 - 5\cdot 3 - 3 = 0$	$(3, 0)$
4	$f(4) = 9$	$(4, 9)$

Funktion nollakohta

Derivaatan nollakohta

Funktion nollakohta

Sijoitetaan lasketut pisteet koordinaatistoon ja piirretään funktion kuvaaja.



Vastaus

a) Funktion minimikohta $x = \frac{5}{4}$ ja minimiarvo $-6\frac{1}{8}$.

b) Suurin arvo on 9 ja pienin arvo $-6\frac{1}{8}$.

Esimerkki 5

Olkoon $g(x)=2x^3-3x^2+a$. Määritä vakio a siten, että funktion g pienin arvo välillä $[0, 2]$ on $-4\frac{1}{2}$.

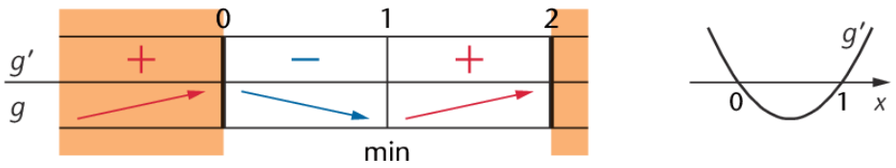
Ratkaisu Funktion pienin arvo löytyy joko välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista.

Funktion derivaatta $g'(x)=2\cdot 3x^2-3\cdot 2x=6x^2-6x$

Derivaatan nollakohdat

$$6x^2-6x=0$$
$$6x(x-1)=0$$
$$6x=0 \text{ tai } x-1=0$$
$$x=0 \qquad x=1$$

Funktion pienin arvo on $-4\frac{1}{2}$, joten on selvitettävä, mikä on funktion minimikohta.
Laaditaan merkki- ja kulkukaavio tarkasteluvälille $[0, 2]$.



Funktio saa siis pienimmän arvonsa kohdassa $x = 1$. Koska pienin arvo on $-4\frac{1}{2}$, saadaan yhtälö

$$g(1)=-4\frac{1}{2}$$
$$2\cdot 1^3-3\cdot 1^2+a=-4\frac{1}{2}$$
$$2-3+a=-4\frac{1}{2}$$
$$a=-3\frac{1}{2}$$

Vastaus $a=-3\frac{1}{2}$

Esimerkki 6

Tarkastellaan funktiota $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$.

a) Määritä funktion muutosnopeus kohdassa $x = -5$.

b) Millä muuttujan x arvolla funktion muutosnopeus on suurin mahdollinen?

Ratkaisu

a) Tangenttisuoran kulmakerroin kuvaa funktion muutosnopeutta tietyssä kohdassa. Muodostetaan ensin funktion derivaattafunktio:

$$f'(x) = -2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 2x - 7 = -6x^2 + 10x - 7$$

Funktion muutosnopeus kohdassa $x = -5$ on

$$f'(-5) = -6 \cdot (-5)^2 + 10 \cdot (-5) - 7 = -207$$

b) Muutosnopeus on suurin, kun derivaatta saa suurimman arvonsa.

Derivoidaan derivaattafunktio eli lasketaan toinen derivaatta.

$$f''(x) = -6 \cdot 2x + 10 = -12x + 10$$

Toisen derivaatan nollakohta:

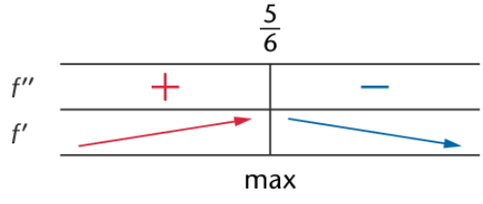
$$-12x + 10 = 0$$

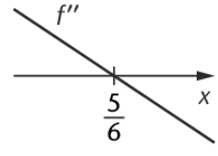
$$-12x = -10 \quad |:(-12)$$

$$x = \frac{-10}{-12}$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Muodostetaan merkki- ja kulkukaavio.





Derivaatta saa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{5}{6}$, joten funktion muutosnopeus on suurin tässä kohdassa.

Vastaus

a) Muutosnopeus kohdassa $x = -5$ on -207.

b) Muutosnopeus on suurin kohdassa $x = \frac{5}{6}$.

Esimerkki 7

Suorakulmion muotoisen järvenrantatontin rantaviivan ja sitä vastaan kohtisuorassa olevan sivun pituus on yhteensä 100 metriä.

a) Laske tontin mitat, kun sen pinta-ala on mahdollisimman suuri?

b) Kuinka paljon tontti maksaa, kun sen neliöhinta on 45 €/m^2?

Ratkaisu

a) Merkitään rantaviivan pituutta kirjaimella x ja rantaviivaa vastaan kohtisuorassa olevan sivun pituutta kirjaimella y.

Sivujen yhteispituus on 100 m, joten

$$x + y = 100$$
$$y = 100 - x$$

Alueen pinta-alaa kuvaa funktio

$$A(x) = xy$$
$$= x(100 - x)$$
$$= 100x - x^2$$

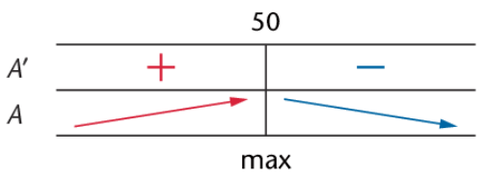
Pinta-alafunktion derivaatta:

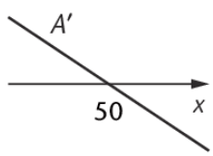
$$A'(x) = 100 - 2x$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$100 - 2x = 0$$
$$-2x = -100 \quad |:(-2)$$
$$x = \frac{-100}{-2}$$
$$x = 50$$

Muodostetaan merkki- ja kulkukaavio.





Pinta-ala on suurin, kun $x = 50$ (m).

Tontin toisen sivun pituus on tällöin $y = 100 - 50 = 50$ (m).

b) Kun $x = 50$ (m), tontin pinta-ala on

$A(50) = 100 \cdot 50 - 50^2 = 2\,500$ m^2.

Tontin hinta on tällöin 45 €/m^2 $\cdot$ 2 500 m^2 = 112 500 €.

Vastaus

a) Tontin mitat ovat 50 m × 50 m.

b) Tontin hinta on 112 500 €.

Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

226 Määritä funktion f derivaatta, kun

a) $f(x) = x(3x^5 - 5x + 1) - 3$

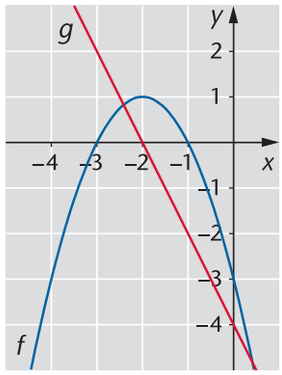
b) $f(x) = x^{2345} - 2x^{1000} + \frac{1}{16}x^{32} - 65$

c) $f(x) = (x+5)^2$

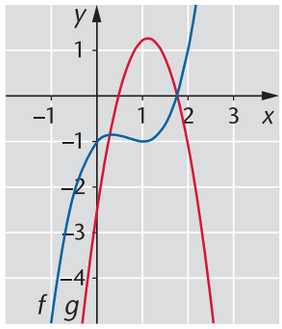
227 Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{3}$ derivaatta. [K2007, 2b]

228 Alla olevaan koordinaatistoon on kuvattu funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajat. Onko kuvaajien perusteella mahdollista, että $g(x) = f'(x)$. Perustele vastauksesi.

a)



b)



229 **a)** Millä vakion t arvolla $f(-2) = f'(-2)$, kun $f(x) = x^2 + 4x + t$?

b) Mitä funktion arvo ja derivaatan arvo kohdassa $x = -2$ kertovat funktion kuvaajasta?

230 Olkoon $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$

a) Määritä funktion derivaatta.

b) Laske derivaatan arvo kohdassa $x = -1$.

c) Laske derivaatan nollakohta.

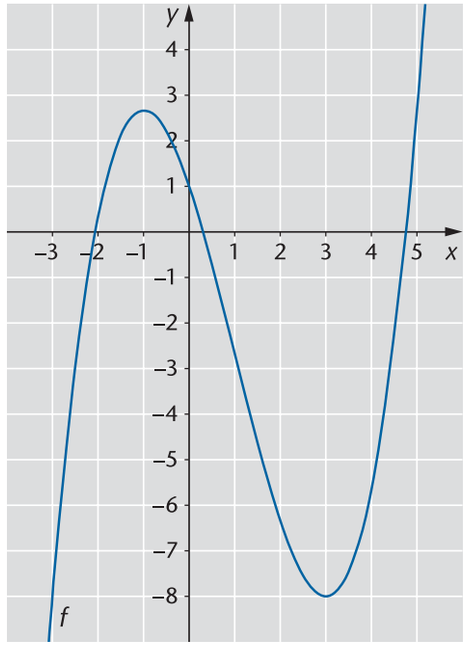
d) Millä muuttujan x arvolla derivaatta saa arvon 2?

231 Vastaa funktion f kuvaajan perusteella seuraaviin kysymyksiin.

a) Millä muuttujan x arvoilla $f'(x) = 0$?

b) Millä muuttujan x arvoilla $f'(x) > 0$?

c) Mitkä ovat funktion f ääriarvokohdat ja ääriarvot?



232 Oheisessa kuviossa on erään funktion kuvaaja. Määritä kuvion perusteella

a) funktion nollakohdat,

b) funktion derivaatan nollakohdat,

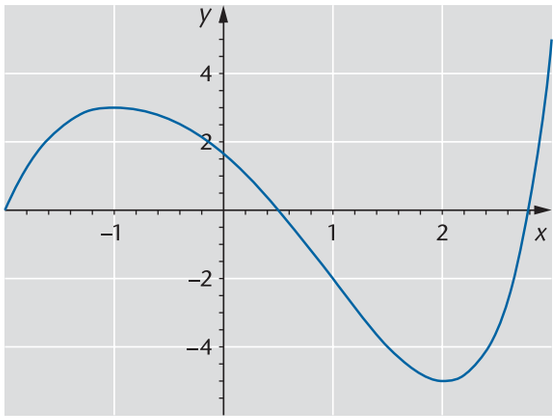
c) funktion suurin arvo välillä $[-2, 3]$,

d) funktion pienin arvo välillä $[-2, 3]$,

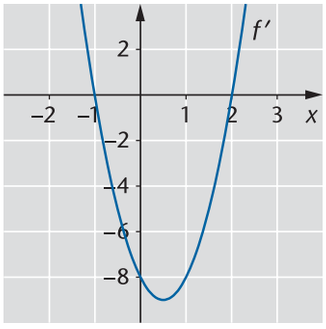
e) välit, joilla funktio on kasvava, ja

f) väli, jolla funktio on vähenevä.

[K2010, 3]



233 Alla olevassa kuvassa on funktion f derivaattafunktion f' kuvaaja. Vastaa derivaatan kuvaajan perusteella kysymyksiin.

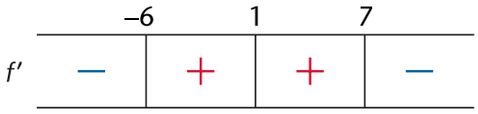


a) Mitkä ovat derivaatan nollakohdat?

b) Millä muuttujan x arvoilla funktio f on kasvava?

c) Millä muuttujan x arvoilla funktion derivaatta f' on kasvava?

234 Alla on kuvattu funktion f derivaatan merkkikaavio. Vastaa kaavion perusteella kysymyksiin.



a) Millä muuttujan x arvoilla funktio on vähenevä?

b) Määritä funktion f ääriarvokohdat.

235 Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ derivaatan nollakohdat. [K2009, 2b]

236 Laske derivaatta $f'(1)$, kun $f(x) = x(x + 2) - 5$. [K2013, 3a]

237 Määritä funktion $f(x) = x(x + 2)^2$ derivaatta kohdassa $x = 0$. [S2012, 3a]

238 Olkoon $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$. Laske $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Millä x:n arvoilla on $f'(x) = 0$? [S2005, 5]

239 Määritä ne kohdat, joissa funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$ derivaatta saa arvon 2. [K2005, 7]

240 Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 4$ kuvaajalle piirretään tangenttisuora kohtaan $x = 0$.

a) Määritä tämän tangenttisuoran yhtälö.

b) Missä kohdassa tangenttisuora leikkaa koordinaattiakselit?

241 Määritä funktion $f(x) = x^2 + 6x - 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[-5, 0]$.

242 Tutki, millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x) = -5x^2 + 2x - 7$ on kasvava?

243 Olkoon $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$.

a) Muodosta funktion f derivaatta.

b) Missä kohdissa funktion kuvaajan tangentti on x-akselin suuntainen?

c) Millä välillä funktio on vähenevä?

[S2009, 3]

244 Tutki, milloin funktio $f(x) = x^3 - 27x + 2$ on kasvava ja milloin vähenevä. [K2006, 7]

245 Määritä se paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ piste (x, y), jossa koordinaattien summa on mahdollisimman pieni. [K2005, 11]

Tehtäviä laskimen kanssa

246 Tarkastellaan funktiota $f(x) = (x + 3)(x^2 - 4)$.

a) Laske funktion $f(x)$ nollakohdat.

b) Määritä derivaatta $f'(x)$.

c) Laske derivaatan nollakohdat.

[K2012, 4]

247 Olkoon $f(x) = (x - 1)(2x + 3) - 1$

a) Määritä derivaatta $f'(x)$.

b) Millä muuttujan x arvoilla funktio on vähenevä?

c) Muodosta funktion kuvaajalle kohtaan $x = 2$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö.

248 Pallo heitetään hetkellä $t = 0$. Sen lentokorkeus metreinä saadaan lausekkeesta $-0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8$, missä t on aika sekunneissa. Kuinka korkealla pallo käy? Millä aikavälillä sen lentorata on laskeva? [K2008, 7]

249 Määritä funktion $f(x) = (x - 2)(3 - x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-3, 3]$. [K2010, 6]

250 Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 4]$. [S2013, 9]

251 Mitä arvoja funktio $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 5$ saa välillä $[0, 2]$? [K2013, 7]

252 Määritä polynomin $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

a) nollakohdat,

b) ääriarvokohdat ja ääriarvot sekä

c) piirrä polynomin kuvaaja.

[S2010, 7]

253 Olkoon $f(x) = -x^3 + x + 2$ ja $g(x) = x^3 - x - 2$. Millä muuttujan x arvoilla on $f'(x) > g'(x)$? [K2011, 9]

254 Tarkastellaan funktiota $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{2}$ välillä $[-1, 4]$.

a) Määritä funktion suurin ja pienin arvo annetulla välillä ja piirrä funktion kuvaaja.

b) Määritä käyrän $y=f(x)$ tangentin kulmakertoimen suurin ja pienin arvo annetulla välillä.

[S2006, 9]

255 Suorakulmion yksi kärki on origossa, toinen pisteessä $(x, 0)$, $0 \le x \le 4$, ja kolmas paraabelilla $y = 4x - x^2$. Muodosta suorakulmion alan lauseke x:n avulla ja määritä alan suurin arvo. [K2009, 10]

256 Ravintolan julkisivu on 8,0 m, ja julkisivua tai sen osaa on tarkoitus käyttää ravintolan suorakulmion muotoisen terassin yhtenä sivuna. Terassin aitaa, portti mukaan lukien, on käytettävissä 20,0 m. Mikä on terassin suurin mahdollinen pinta-ala? Minkä pituisia ovat terassin sivut? [S2009, 10]

257 Paraabelin $y = x^2 + 4$ pisteeseen $A = (3, 13)$ asetetaan tangentti. Tämä leikkaa x-akselin pisteessä B. Pisteen A kautta kulkeva y-akselin suuntainen suora leikkaa x-akselin pisteessä C. Laske kolmion ABC pinta-ala. [S2011, 11]

258 **a)** Millä vakion a arvolla funktion $f(x) = ax^2 - 4x + 8$ pienin arvo on 0?

b) Millä vakion b arvolla funktio $g(x) = bx^2 - 4x + 8$ saa positiivisia arvoja täsmälleen silloin, kun $-2 < x < 1$? [K2014, 10]

259 Paraabelin $y=ax^2+bx-3$ huippu on pisteessä $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$. Määritä kertoimet a ja b. [K2007, 12]

260 Kolmannen asteen polynomifunktiolla $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ on paikallinen minimi -2 kohdassa $x = 0$ ja paikallinen maksimi 1 kohdassa $x = 2$. Määritä kertoimet a, b, c ja d. [K2008, 10]

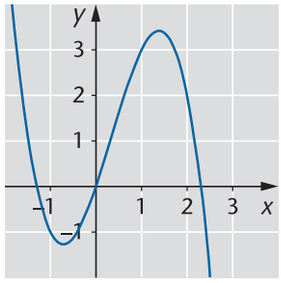
261 Funktio $f(x)=\sqrt{1+x}$ korvataan sitä lähellä olevalla polynomilla $p(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$. Laske, kuinka monta prosenttia polynomin derivaatta $p'(x)$ poikkeaa funktion $f(x)$ derivaatasta $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ pisteessä $x = 0{,}5$. Piirrä samaan kuvaan funktioiden $f(x)$ ja $p(x)$ kuvaajat välillä $[-1, 1]$. [S2007, 13]

262 Rautalanka, jonka pituus on 120 cm, katkaistaan kahteen osaan. Toinen osa taivutetaan neliöksi ja toinen ympyräksi. Miten lanka on katkaistava, jotta ympyrän ja neliön alojen summa olisi mahdollisimman pieni? [S2007, 12]

263 Määritä funktion $f(x)=-x^3+13{,}5x^2-41x+50$ suurin arvo välillä $[0, 10]$. Mikä on vastaava muuttujan x arvo? Millä muuttujan x arvolla funktio kasvaa nopeimmin? Anna vastaukset kolmen desimaalin tarkkuudella. Piirrä funktion kuvaaja ko. välillä. [S2008, 12]

264 **a)** Mihin käyrän $y=-x^3+x^2+3x$ pisteeseen asetetun tangentin kulmakerroin on suurin mahdollinen?

b) Määritä a-kohdan tangentin yhtälö. [K2014, 13]

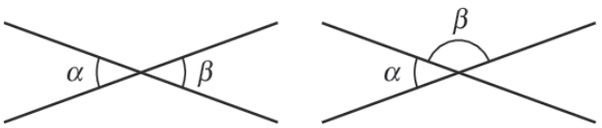


9 Tasogeometriaa – monikulmiot

Kulmia

- Kulmat α ja β ovat **ristikulmia.**

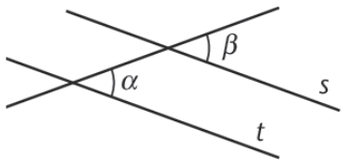
$\alpha = \beta$



- Kulmat α ja β ovat **vieruskulmia.**

$\alpha + \beta = 180°$

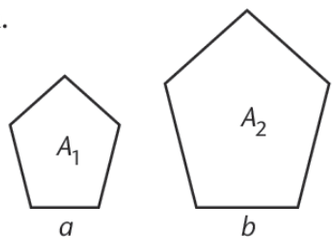
- Kulmat α ja β ovat **samankohtaisia kulmia**.
  - Jos suorat s ja t ovat yhdensuuntaisia, $\alpha = \beta$.



Yhdenmuotoisuus

- Yhdenmuotoisilla kuvioilla **vastinsivujen suhde eli mittakaava** on sama riippumatta siitä, mitkä kaksi vastinsivua valitaan.

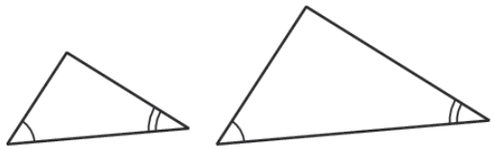
$$\text{mittakaava} = \frac{a}{b} = a : b$$



- Yhdenmuotoisille kuvioille **pinta-alojen suhde** on yhtä suuri kuin mittakaavan neliö.

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

- Kolmiot ovat yhdenmuotoiset, jos niiden kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuret (**kk-lause**).

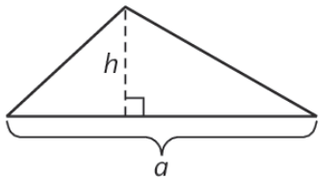


Kolmiot

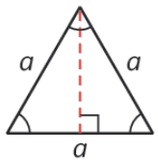
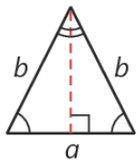
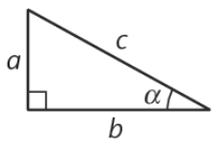
- Kolmion kulmien summa on 180°.

- Kolmion ala lasketaan kannan a ja korkeuden h avulla. Korkeusjana on kohtisuorassa kantaa vastaan.

$$A = \frac{ah}{2}$$

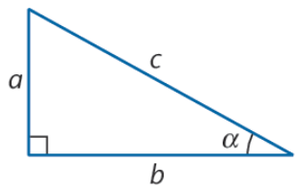


- Erityisiä kolmioita:

Tasasivuinen kolmio	Kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja jokainen kulma on 60°. Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.	
Tasakylkinen kolmio	Kolmion kyljet (b) ovat yhtä pitkät ja kantakulmat yhtä suuret. Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.	
Suorakulmainen kolmio	Kolmion kateettien (kaksi lyhyintä sivua, a ja b) välinen kulma on 90°. Hypotenuusa (c) on kolmion pisin sivu.	

- Suorakulmaiselle kolmiolle on voimassa **Pythagoraan lause**.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



- Suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia ja terävien kulmien suuruuksia voidaan ratkaista **trigonometristen funktioiden** avulla.

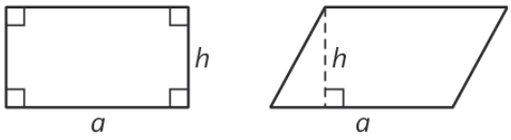
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Nelikulmiot

- Nelikulmion kulmien summa on 360°.

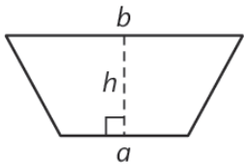
- Jos nelikulmio on suorakulmio tai suunnikas, sen ala on kannan ja korkeuden tulo.

$A = ah$

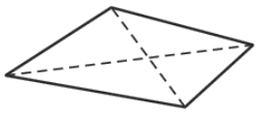


- Puolisuunnikkaan alan laskemiseen tarvitaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet a ja b sekä näiden sivujen välinen etäisyys h.

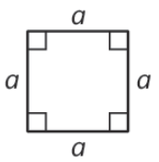
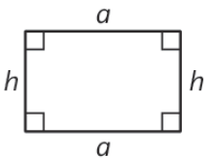
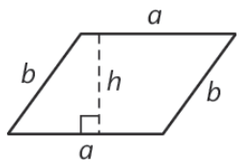
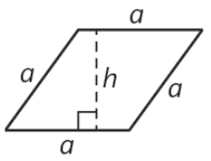
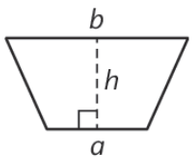
$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$



- Nelikulmiolla on kaksi **lävistäjää**, jotka yleensä ovat eripituiset.

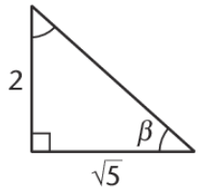


- Erityisiä nelikulmioita:

Neliö	Neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja jokainen kulma on 90°.	
Suorakulmio	Suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat 90°.	
Suunnikas	Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät. Vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.	
Neljäkäs	Neljäkkään kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.	
Puolisuunnikas	Puolisuunnikkaalla on kaksi yhdensuuntaista sivua. Tasakylkisen puolisuunnikkaan erisuuntaiset sivut ovat yhtä pitkät.	

Esimerkki 1

Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 2 ja $\sqrt{5}$.



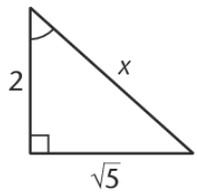
a) Laske hypotenuusan pituus.

b) Määritä kulman β sinin ja tangentin tarkka arvo.

Ratkaisu

a) Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella x. Ratkaistaan x Pythagoraan lauseen avulla:

$$x^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2$$
$$x^2 = 4 + 5$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

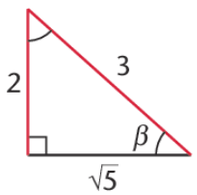


Pituus ei voi olla negatiivinen luku, joten ratkaisuksi kelpaa vain $x = 3$.

Hypotenuusan pituus on siis 3.

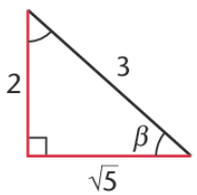
b) Kulman sini on vastaisen kateetin ja hypotenuusan pituuksien suhde.

$$\sin\beta = \frac{2}{3}$$



Tangentti on taas vastaisen kateetin ja viereisen kateetin pituuksien suhde.

$$\tan\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



Vastaus

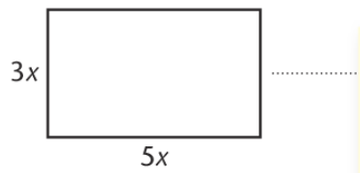
a) 3

b) $\sin\beta = \frac{2}{3}$, $\tan\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Esimerkki 2

Suorakulmion erisuuntaisten sivujen pituuksien suhde on 3:5. Laske sivujen pituudet ja suorakulmion piiri, kun suorakulmion ala on 60.

Ratkaisu Koska sivujen suhde on 3:5, sivujen pituuksiksi voidaan merkitä $3x$ ja $5x$.



Sivujen pituuksien suhde:

$$\frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} = 3:5$$

Tällöin alan lauseke on

$$3x \cdot 5x = 15x^2.$$

Ratkaistaan x yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} 15x^2 &= 60 \quad |:15 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

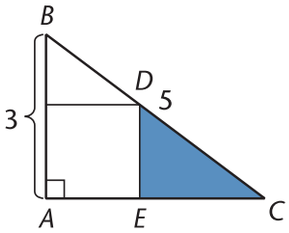
Sivut ovat siis $3 \cdot 2 = 6$ ja $5 \cdot 2 = 10$.

Piiri on tällöin $2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 12 + 20 = 32$.

Vastaus Sivut ovat 6 ja 10, piiri on 32.

Esimerkki 3

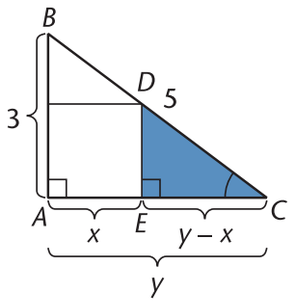
Neliön kärkipiste D sijaitsee kuvan mukaisesti hypotenuusalla, jonka pituus on 5. Laske varjostetun kolmion CED ala.



Ratkaisu Kolmiot ABC ja CED ovat yhdenmuotoisia (kk-lause), koska molemmissa on suora kulma ja yhteinen kulma C. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x ja kateettia AC kirjaimella y.

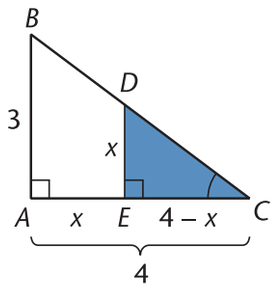
Ratkaistaan y Pythagoraan lauseella.

$$y^2 + 3^2 = 5^2$$
$$y^2 = 25 - 9$$
$$y^2 = 16$$
$$y = 4 \text{ (tai } y = -4)$$



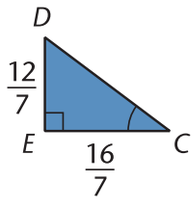
Yhdenmuotoisuuden perusteella vastinsivujen pituuksien suhde on sama. Tällöin

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EC}$$
$$\frac{3}{x} = \frac{4}{4-x}$$
$$4x = 3(4-x)$$
$$4x = 12 - 3x$$
$$7x = 12$$
$$x = \frac{12}{7}$$



Sivun EC pituus on siis $4 - \frac{12}{7} = \frac{28}{7} - \frac{12}{7} = \frac{16}{7}$.

Kolmion CED ala on $\frac{\frac{16}{7} \cdot \frac{12}{7}}{2} = \frac{16 \cdot 12}{7 \cdot 7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{96}{49}$.



Vastaus Kolmion ala on $\frac{96}{49} = 1\frac{47}{49}$.

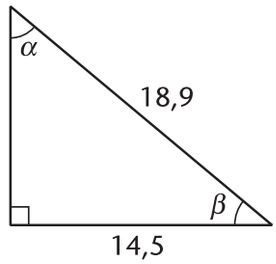
Esimerkki 4

Suorakulmaisen kolmion pidempi kateetti on 14,5 cm ja hypotenuusa 18,9 cm. Laske kolmion terävät kulmat 0,1 asteen tarkkuudella.

Ratkaisu Merkitään kulmia kirjaimilla α ja β. Kulmat voidaan ratkaista sinin ja kosinin avulla.

$$\cos\beta = \frac{14{,}5}{18{,}9}$$

$$\beta = 39{,}89...^\circ \approx 39{,}9^\circ$$



$$\sin\alpha = \frac{14{,}5}{18{,}9}$$

$$\alpha = 50{,}10...^\circ \approx 50{,}1^\circ$$

Suorakulmaisen kolmion terävien kulmien summa on 90°. Tuloksen voi tarkistaa laskemalla kulmat yhteen eli

$$39{,}9^\circ + 50{,}1^\circ = 90^\circ.$$

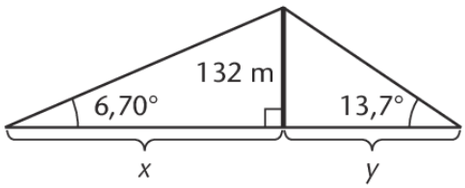
Vastaus Kulmat ovat 39,9° ja 50,1°.

Esimerkki 5

Kaksi henkilöä seisoo radiomaston vastakkaisilla puolilla siten, että toinen on mastosta suoraan pohjoiseen, toinen etelään. Pohjoisessa oleva henkilö näkee maston huipun 6,70°:n kulmassa ja etelässä seisova henkilö 13,7°:n kulmassa. Mikä on henkilöiden välinen etäisyys, kun maston korkeus on 132 m?

Ratkaisu

Piirretään tilanteesta mallikuva. Merkitään henkilöiden etäisyyksiä mastosta kirjaimilla x ja y.



Etäisyydet voidaan laskea tangentin avulla.

$$\tan 6{,}70° = \frac{132}{x} \quad |\cdot x \neq 0$$
$$x \cdot \tan 6{,}70° = 132 \quad |: \tan 6{,}70°$$
$$x = 1123{,}66...$$

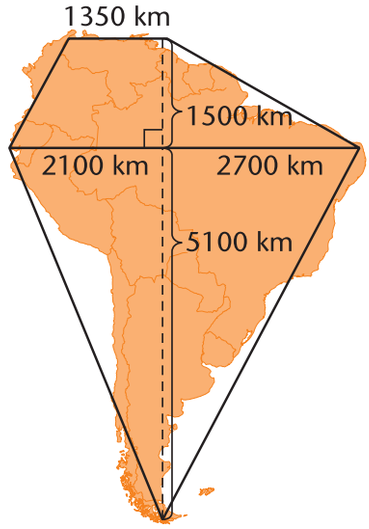
$$\tan 13{,}7° = \frac{132}{y} \quad |\cdot y \neq 0$$
$$y \cdot \tan 13{,}7° = 132 \quad |: \tan 13{,}7°$$
$$y = 541{,}48...$$

Kysytty etäisyys on $(1\,123{,}66\ldots + 541{,}48\ldots)$ m $\approx 1\,670$ m.

Vastaus 1 670 m

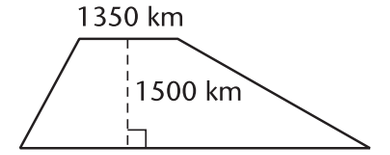
Esimerkki 6

Etelä-Amerikan voidaan ajatella muodostuvan puolisuunnikkaasta ja kolmiosta kuvan mukaisesti. Laske kuvan avulla Etelä-Amerikan ala. Kuinka monta prosenttia tämä arvio poikkeaa Etelä-Amerikan todellisesta alasta, joka on 17,8 miljoonaa neliökilometriä?

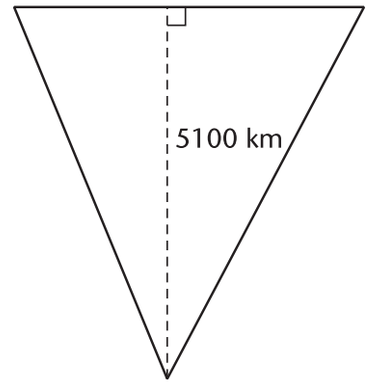


Ratkaisu

Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 1 350 km ja 4 800 km, ja puolisuunnikkaan korkeus on 1 500 km.



2100 km + 2700 km = 4800 km



$$A_{\text{puolisuunnikas}} = 1\,500 \text{ km} \cdot \left(\frac{1\,350 \text{ km} + 4\,800 \text{ km}}{2} \right) = 4\,612\,500 \text{ km}^2$$

Kolmion kanta on 4 800 km ja korkeus 5 100 km.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{4\,800 \text{ km} \cdot 5\,100 \text{ km}}{2} = 12\,240\,000 \text{ km}^2$$

Kuvioiden yhteenlaskettu ala on

$$\begin{aligned} 4\,612\,500 \text{ km}^2 + 12\,240\,000 \text{ km}^2 &= 16\,852\,500 \text{ km}^2 \\ &= 16\,900\,000 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Verrataan vielä todellisen alan ja arvion erotusta todelliseen alaan.

$$\frac{17\,800\,000 - 16\,852\,500}{17\,800\,000} = 0{,}05323... \approx 5{,}3\ \%$$

Vastaus

Kuvasta arvioituna ala on 16,9 miljoonaa neliökilometriä. Se poikkeaa todellisesta alasta 5,3 %.

Esimerkki 7

Suorakulmiolla ja neliöllä on yhtä suuret alat. Suorakulmion kanta on 40,0 % pidempi kuin sen korkeus. Neliön sivun pituus on a ($a > 0$). Määritä neliön sivun pituuden avulla lausuttuna

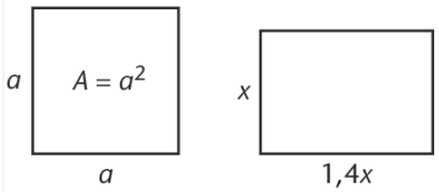
a) suorakulmion piiri.

b) suorakulmion lävistäjä.

Anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu

a) Koska neliön sivun pituus on a, sen ala on a^2.



Jos suorakulmion korkeus on x ($x > 0$), kannan pituus on $1{,}4x$.

Suorakulmiolla on sama ala kuin neliöllä. Ratkaistaan x yhtälön avulla.

$$x \cdot 1{,}4x = a^2$$

$$1{,}4x^2 = a^2 \quad |:1{,}4$$

$$x^2 = \frac{1}{1{,}4}a^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{1{,}4}}a = \pm 0{,}845\ldots a$$

Tällöin suorakulmion piiri on

$$2 \cdot x + 2 \cdot 1{,}4x = 4{,}8x = 4{,}8 \cdot 0{,}845\ldots a \approx 4{,}06a.$$

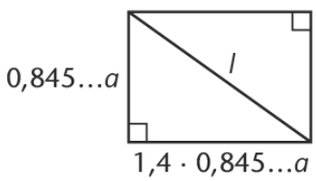
b) Merkitään suorakulmion lävistäjää kirjaimella l. Ratkaistaan lävistäjien pituudet Pythagoraan lauseella.

$$l^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{1{,}4}}a\right)^2 + \left(1{,}4^\circ\sqrt{\frac{1}{1{,}4}}a\right)^2$$

$$l^2 = (0{,}845\ldots a)^2 + (1{,}4 \cdot 0{,}845\ldots a)^2$$

$$l^2 = 2{,}11\ldots a^2$$

$$l = \pm 1{,}454\ldots a$$



Lävistäjän pituus on $1{,}45a$.

Vastaus

a) $4{,}06a$ **b)** $1{,}45a$

Esimerkki 8

Kartan mittakaava on 1:30000. Kartasta tehdään seinälle suurennos, jolloin kartan pinta-ala nelinkertaistuu.

a) Mikä on suurennetun kartan mittakaava?

b) Maantien pituus on 18,6 km. Kuinka pitkä maantie on uudessa kartassa?

Ratkaisu

a) Merkitään alkuperäisen kartan pinta-alaa kirjaimella A, jolloin suurennoksen pinta-ala on $4A$.

Yhdenmuotoisten kuvioiden alojen suhde on yhtä suuri kuin mittakaavan neliö. Jos alkuperäisessä kartassa etäisyys on 1, uudessa kartassa tätä etäisyyttä voidaan merkitä kirjaimella x.

Mittakaava on siis $1 : x$.

$$\frac{A}{4A} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{x^2}$$ Kerrotaan ristiin.

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Uudessa kartassa pituudet ovat siis kaksinkertaistuneet. Koska pituudet luonnossa ovat säilyneet samoina, 1 cm kartalla tarkoittaa enää 15 000 cm luonnossa eli uuden kartan mittakaava on 1 : 15 000.

b) Merkitään pituutta uudessa kartassa kirjaimella y. Pituus 18,6 km on muunnettava ensin senttimetreiksi:

$$18{,}6\ \text{km} = 18\,600\ \text{m} = 1\,860\,000\ \text{cm} = 1{,}86 \cdot 10^6\ \text{cm}$$

Kartta(cm)	Luonto (cm)
1	15 000
y	$1{,}86 \cdot 10^6$

$$\frac{1}{y} = \frac{15\,000}{1{,}86 \cdot 10^6}$$

$$15\,000y = 1{,}86 \cdot 10^6 \quad |:15\,000$$

$$y = 124$$

Kartalla tien pituus on siis 124 cm.

Vastaus **a)** 1 : 15 000 **b)** 124 cm

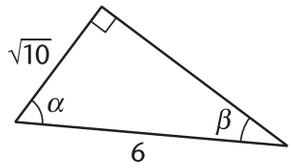
Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

265 Suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 10 ja lyhyempi kateetti on 6. Laske
a) pidemmän kateetin pituus
b) suorakulmaisen kolmion ala.

266 Kolmiossa ABC kulma A on 28° ja kulman B vieruskulma 110°. Määritä kulmien B ja C suuruudet. [S2011, 2a]

267 Määritä kolmiolle
a) $\cos\alpha$
b) $\tan\beta$.

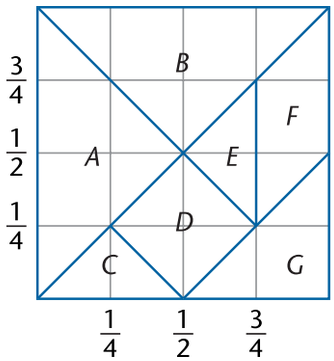


268 Kolmion suurin kulma on kaksi kertaa niin suuri kuin toiseksi suurin. Pienin kulma on 20 astetta pienempi kuin toiseksi suurin kulma. Määritä kolmion kulmat.

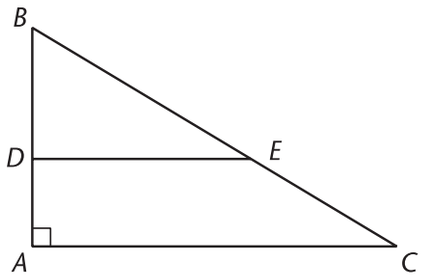
269 Suorakulmion sivuista toinen on kaksi kertaa niin pitkä kuin toinen. Laske sivujen pituudet ja suorakulmion piiri, kun suorakulmion ala on 50.

270 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien suhde on 1:4. Laske hypotenuusan pituus, kun kolmion ala on 4.

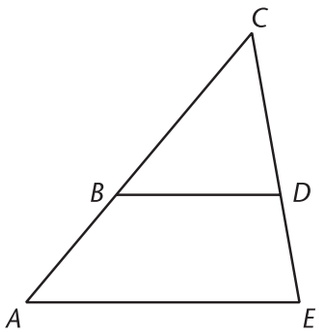
271 Kiinalaisen Tangram-pelin pelilaatat saadaan jakamalla neliö osiin oheisen kuvan mukaisesti.
Ilmoita osien pinta-alat, kun koko neliön sivun pituus on 1. [S2011, 3]



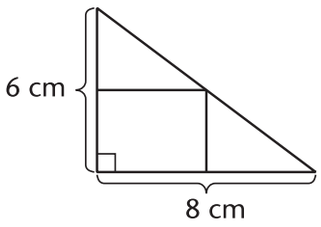
272 Janat AC ja DE ovat yhdensuuntaiset. Laske kolmion DBE ala, kun $AB = 3$, $AC = 5$ ja $AD{:}DB = 2{:}3$.



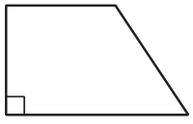
273 Janat AE ja BD ovat yhdensuuntaiset. Janan BD pituus on 60 % janan AE pituudesta. Laske kolmion ACE ala, kun kolmion BCD ala on 3.



274 Kuvan suorakulmion, jonka kärkipiste sijaitsee kolmion hypotenuusalla, kanta on 1 cm suurempi kuin korkeus. Laske suorakulmion ala.



275 Kuvan puolisuunnikkaan ala on 12. Yhdensuuntaisten sivujen pituusero on 2 ja niiden välinen etäisyys on yhtä suuri kuin lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista. Määritä yhdensuuntaisten sivujen pituudet.



Tehtäviä laskimen kanssa

276 Suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 2 ja hypotenuusan pituus 5. Laske kolmion terävien kulmien suuruudet asteen tarkkuudella. [K2011, 2a]

277 Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 11 ja toisen kateetin pituus 5. Määritä kolmion terävät kulmat 0,01 asteen tarkkuudella. [S2007, 2a]

278 Suorakulmion yksi sivu on 4,42 m ja suorakulmion pinta-ala on 32,20 m^2. Määritä suorakulmion

a) sivujen pituudet,

b) lävistäjän pituus. [K2007, 3]

279 Neliön pinta-ala on 1,20 m^2. Laske neliön lävistäjän pituus senttimetrin tarkkuudella. [K2010, 2a]

280 Suunnikkaan muotoisista koristelaatan palasista kootaan kuvioita kylpyhuoneen seinälle. Yhteen kuvioon kuuluu 20 koristelaattaa. Laske yhden koristekuvion pinta-ala, kun suunnikkaan muotoisen laatan erimittaiset sivut ovat 35 mm ja 20 mm sekä näiden välinen kulma 35°.

281 Suorakulmaisessa kolmiossa toisen terävän kulman sini on 0,123. Laske kolmion terävät kulmat asteen tarkkuudella. [S2010, 2b]

282 Kolmion ABC sivulta AC valitaan piste D siten että pituuksien AD ja DC suhde on 3:2. Kolmio ABC jaetaan kahteen osaa janalla, joka kulkee pisteen D kautta ja on janan AB suuntainen. Laske osien alat, kun kolmion ala on 125 cm^2.

283 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 5,0 cm ja 8,0 cm. Määritä hypotenuusan pituus millimetrin tarkkuudella ja terävien kulmien suuruus asteen tarkkuudella. [K2014, 3a]

284 Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 4,9 m ja kateetin pituus 2,3 m. Laske toisen kateetin pituus 0,1 metrin tarkkuudella. [S2012, 2b]

285 Laskettelurinteen kaltevuuskulma on 7,0 astetta ja rinteen korkeusero 180 metriä. Kuinka pitkä rinne on? Kuinka kauan kestää hiihtohissillä matka rinnettä pitkin alhaalta ylös, kun hiihtohissin nopeus on 6 km/h? [K2008, 3a]

286 Pisteitä $A = (1,4)$ ja $B = (7,1)$ katsotaan origosta. Kuinka suuressa kulmassa jana AB tällöin näkyy, ts. mikä on janan päätepisteisiin suuntautuvien tähtäysviivojen välinen kulma? Anna vastaus yhden asteen tarkkuudella. [S2010, 6]

287 Suorakulmion kanta on 11 cm ja korkeus 7 cm. Sen kanta lyhenee 20 prosenttia, ja korkeus kasvaa 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia suorakulmion pinta-ala pienenee? [S2013, 2c]

288 Tasakylkisen kolmion kylki on 90 m ja kanta 40 m.

a) Laske kolmion huippukulma asteen tarkkuudella.

b) Laske kolmion pinta-ala neliömetrin tarkkuudella.

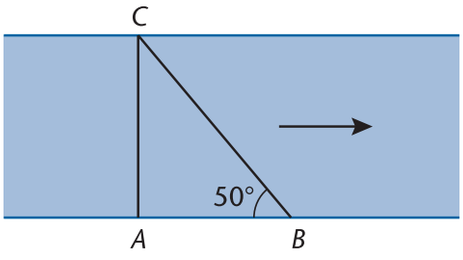
[S2013, 3]

289 Puun varjon pituus (itä-länsisuunnassa) mitattiin kahdella eri hetkellä saman päivän aikana. Ensimmäisellä mittaushetkellä auringon säteet muodostivat 29° kulman maanpinnan kanssa. Myöhemmin säteet muodostivat 36° kulman, mutta varjo oli 6,8 m lyhyempi. Laske näiden tietojen avulla puun pituus.

290 Kaksi lentokonetta lähtee samasta paikasta ja niillä on sama määränpää. Ensimmäinen kone lentää pohjoiseen 150 km ja kääntyy sitten länteen ja lentää vielä 250 km. Toinen lentää suoraan määränpäähän. Sääolojen takia suoralla reitillä lentonopeus on vain 750 km/h, kun taas pidemmällä reitillä lennetään maksiminopeutta 980 km/h. Kumpi kone on aikaisemmin perillä?

291 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3,2 cm ja 5,7 cm. Laske hypotenuusan pituus ja suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta. [K2010, 7]

292 Biologi haluaa arvioida joen leveyttä, jotta hän voi asettaa kalojen liikkumista mittaavia laitteita jokeen. Hän katsoo joen rannalla olevasta pisteestä A kohtisuoraan vastarannalla olevaa pistettä C. Pisteestä A hän kävelee 30 metriä alavirtaan pisteeseen B, josta katsottuna vastarannan piste C näkyy 50 asteen kulmassa alla olevan kuvan mukaisesti. Laske joen leveys AC metrin tarkkuudella. [K2012, 6]



293 A4-kokoisen kartan mittakaava on 1:20 000. Kartta pienennetään kopiokoneella A5-kokoiseksi, jolloin sen pinta-ala pienenee puoleen, mutta muoto säilyy. Mikä on pienennetyn kartan mittakaava? [K2011, 6]

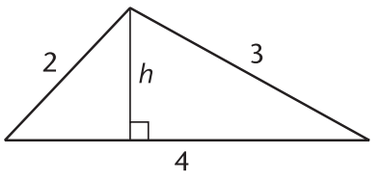
294 Määritä suorakulmaisen kolmion muotoisen tontin sivujen pituudet ja pinta-ala, kun kartasta mitattuna kahden pisimmän sivun pituudet ovat 92 mm ja 73 mm. Kartan mittakaava on 1 : 2 000. [S2010, 4]

295 Suunnistajat Liisa ja Pia lähtivät yhtaikaa rastilta A ja juoksivat suoraan länteen 800 m, minkä jälkeen heidän reitinvalintansa erosivat. Liisa kääntyi etelään ja juoksi 400 m pisteeseen B, josta hän jatkoi suoran AB suuntaan 1 500 m ja päätyi rastille C ajassa 20 min 30 s. Pia jatkoi ensin länteen ja kääntyi sitten etelään niin, että päätyi suoraan rastille C 3 min 20 s Liisan jälkeen. Määritä Liisan ja Pian reittien pituudet ja kummankin keskinopeus yksikkönä km/h. [S2008, 5]

296 Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 3 ja 4.

a) Laske pisintä sivua vastaava korkeus h kahden desimaalin tarkkuudella.

b) Laske kolmion kulmien suuruudet asteen tarkkuudella.



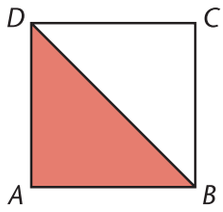
[S2011, 7]

297 Kaksi autoilijaa ajaa peräkkäin vaakasuoraa tietä. Toinen näkee 5,0 m silmänkorkeutta ylempänä olevat ryhmittymismerkit noin 15 asteen kulmassa ja toinen noin 35 asteen kulmassa vaakatasoon nähden. Kuinka kaukana autoilijat ovat toisistaan? [S2009, 6]

298 Neljäkkään (vinoneliön) sivun pituus on 8,0 cm. Lyhyempi lävistäjistä on 4,0 cm pitkä. Laske pitemmän lävistäjän pituus. [K2009, 7]

299 Tasasivuisen kolmiolla on yhtä suuri piiri kuin neliöllä. Kuinka monta prosenttia kolmion ala on neliön alasta? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

300 Kuvan suorakulmaisen kolmion *ABD* piiri on 18 cm. Laske neliön *ABCD* piiri.



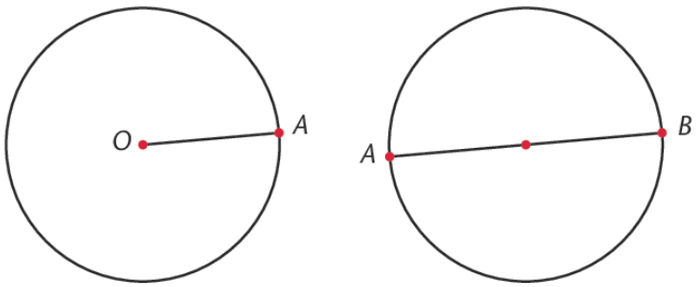
301 Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 8 ja kyljen pituus on 10. Kolmion sisällä on suurin mahdollinen neliö siten, että neliön yksi sivu sijaitsee kolmion kannalla ja kaksi neliön kärkipistettä koskettavat kolmion kylkiä. Laske neliön ala.

10 Ympyrä

Kehän pituus ja ympyrän ala

- ***O*** on ympyrän **keskipiste**.
- ***A*** on ympyrän **kehäpiste**.
- Jana ***OA*** on ympyrän **säde** (r).
- Jana ***AB*** on ympyrän **halkaisija** (d).

$$d = 2 \cdot r$$



- Kehäpisteiden joukko muodostaa **ympyrän kehän** (p), jonka pituus voidaan laskea säteen tai halkaisijan avulla.

$$p = d \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- **Ympyrän ala** riippuu säteestä.

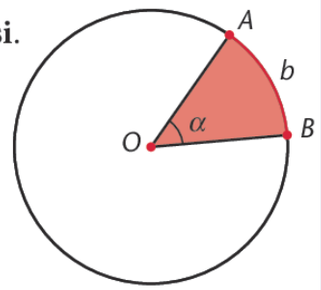
$$A = \pi r^2$$

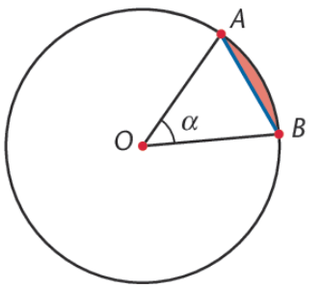
Sektori ja segmentti

- Kaksi sädettä, OA ja OB, rajaavat ympyrästä tasoalueen, jota kutsutaan **sektoriksi**.
- α on sektorin **keskuskulma**.
- **Kehäpisteiden** A ja B väliin jäävä osa ympyrän kehästä on **kaari** (b).
- Sektorin kaaren pituus ja **sektorin ala** riippuvat ympyrän säteen pituudesta ja keskuskulmasta.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

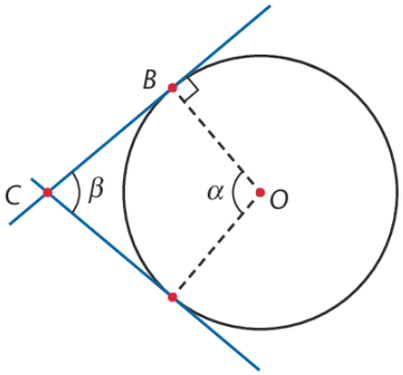




- Kehäpisteiden A ja B välinen jana AB on **jänne**.
- **Segmentti** on alue, joka jää jänteen ja kaaren väliin.

Ympyrän tangentti

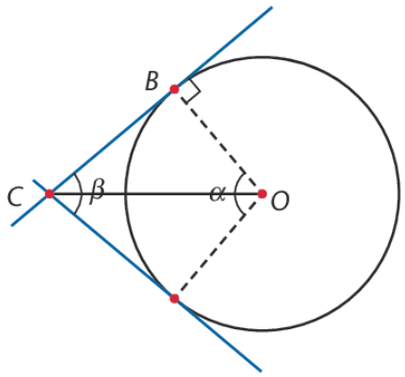
- Suora, joka sivuaa ympyrää pisteessä B, on nimeltään **tangentti**.
- Säde OB on kohtisuorassa tangenttia vastaan.
- Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä C voidaan piirtää kaksi tangenttia ympyrälle.



- **Tangenttikulma** β muodostuu tangenttien väliin.
- Tangenttikulman β ja sitä vastaavan keskuskulman α summa on 180°.

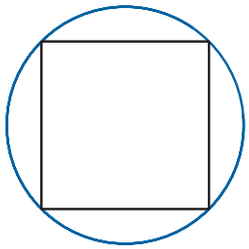
$$\alpha + \beta = 180°$$

- Jana OC puolittaa sekä tangentti- että keskuskulman.



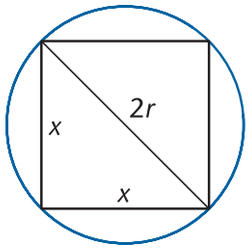
Esimerkki 1

Ympyrän sisään on piirretty suurin mahdollinen neliö. Ympyrän säteen pituus on r. Määritä neliön ala säteen r avulla lausuttuna.



Ratkaisu Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x ($x > 0$).

Koska ympyrän säde on r, sen halkaisuja on $2r$. Halkaisija on yhtä suuri kuin neliön lävistäjä.



Pythagoraan lauseen perusteella

$$x^2 + x^2 = (2r)^2$$
$$2x^2 = 4r^2 \quad |:2$$
$$x^2 = 2r^2$$
$$x = \pm\sqrt{2r^2}$$
$$x = \pm r\sqrt{2}$$

Neliön sivun pituudeksi kelpaa vain positiivinen luku $r\sqrt{2}$.

Tällöin neliön ala on

$$A = \left(r\sqrt{2}\right)^2 = r^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2r^2$$

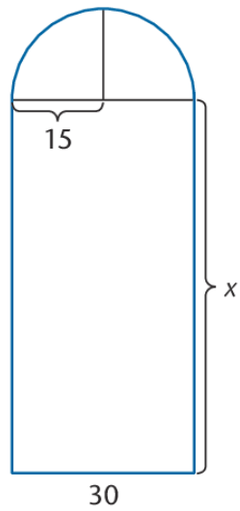
Vastaus Neliön ala on $2r^2$.

Esimerkki 2

Fortuna-pelin kehitti 1900-luvun alkupuolella opettaja ja leikkikalutehtailija Juho Jussila. Pelilauta on muodoltaan suorakulmio, jonka toisessa päässä on puoliympyrä. Kuvan pelilaudan ympärysmitta on 200 cm. Laske pelilaudan ala, kun laudan leveys on 30 cm.

Ratkaisu Koska laudan leveys on 30 cm, puoliympyrän säde on 15 cm.

Merkitään pelilaudan suorakulmion korkeutta kirjaimella x.



Pelilaudan piiri muodostuu

- puoliympyrän kehästä $\pi \cdot 15$
- suorakulmion kolmesta sivusta $2x + 30$

Puoliympyrän kehä

$$\frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

Koska laudan ympärysmitta on 200 cm,

$$\pi \cdot 15 + 2x + 30 = 200$$
$$2x + 30 + 15\pi = 200$$
$$2x = 170 - 15\pi$$
$$2x = 122{,}876... \quad |:2$$
$$x = 61{,}438...$$

Pelilaudan alaksi saadaan

$$30 \cdot 61{,}438... + \frac{\pi \cdot 15^2}{2} = 2196{,}57... \approx 2200 \left(\text{cm}^2\right).$$

Vastaus Pelilaudan ala on 2200 cm^2.

Esimerkki 3

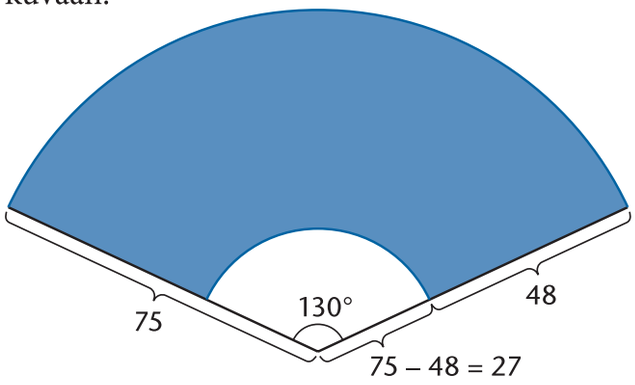
Linja-auton tuulilasissa on yksi tuulilasinpyyhkijä. Se on kiinnitetty lasin alareunaan keskelle lasia. Pyyhkijän pituus on 75 cm, josta kumisen sulan osuus on 48 cm. Pyyhkiessään lasia pyyhkijä liikkuu sektorin muotoisella alueella, jonka keskuskulma on 130°.

a) Kuinka suuren alueen pyyhkijä puhdistaa?

b) Kuinka pitkä on puhdistetun alueen piiri?

Ratkaisu

a) Piirretään tilanteesta mallikuva. Sulka pyyhkii alueen, joka on väritetty kuvaan.



Kysytyn alueen ala saadaan vähentämällä ison sektorin alasta pienemmän sektorin ala.

$$A_{\text{iso}} = \frac{130°}{360°} \cdot \pi \cdot 75^2 = 6381{,}36...$$

$$A_{\text{pieni}} = \frac{130°}{360°} \cdot \pi \cdot 27^2 = 827{,}02...$$

$$A_{\text{väritetty}} = A_{\text{iso}} - A_{\text{pieni}} = 6381{,}36\ldots - 827{,}02\ldots \approx 5600\ \left(\text{cm}^2\right)$$

b) Piirin laskemiseksi tarvitaan isomman ja pienemmän sektorin kaaren pituudet.

$$b_{\text{iso}} = \frac{130°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 75 = 170{,}16...$$

$$b_{\text{pieni}} = \frac{130°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 27 = 61{,}26...$$

Piiri on tällöin $170{,}16\ldots + 61{,}26\ldots + 2 \cdot 48 \approx 330$ (cm).

Vastaus

a) 5 600 $\text{cm}^2 = 56\ \text{dm}^2$ **b)** 330 cm

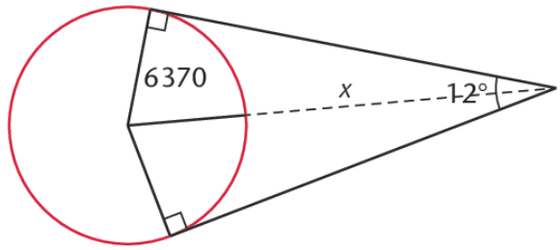
Esimerkki 4

Nollas pituuspiiri eli nollameridiaani kulkee Greenwichin kautta. Avaruusalus lentää avaruudessa tämän pituuspiirin kohdalla. Aluksesta voidaan nähdä kerralla osa pituuspiiristä 12°:n kulmassa. Millä etäisyydellä maapallon pinnasta avaruusalus kulkee, kun maapallon säde on 6 370 km?

Ratkaisu

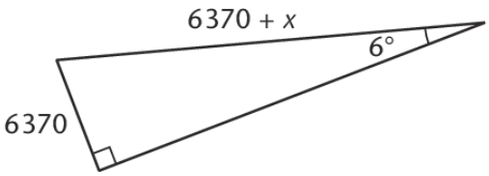
Pituuspiirit ovat isoympyröitä, joilla on siis sama kehän pituus kuin päiväntasaajalla. Avaruusaluksesta nähdään tangenttien väliin jäävä osa tätä ympyrän kehää eli kaari.

Merkitään aluksen etäisyyttä maapallon pinnasta kirjaimella x.



Tangenttisuorien väliin jäävä kulma on 12°.

Kuvioon syntyvästä suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö:



$$\sin 6° = \frac{6370}{6370+x} \quad |\cdot(6370+x)$$

$$\sin 6° \cdot (6370+x) = 6370 \quad |: \sin 6°$$

$$6370+x = \frac{6370}{\sin 6°}$$

$$x = \frac{6370}{\sin 6°} - 6370$$

$$x = 54570{,}3....$$

$$x \approx 54600\,(\text{km})$$

Vastaus

Avaruusalus on 54 600 km:n etäisyydellä maapallon pinnasta.

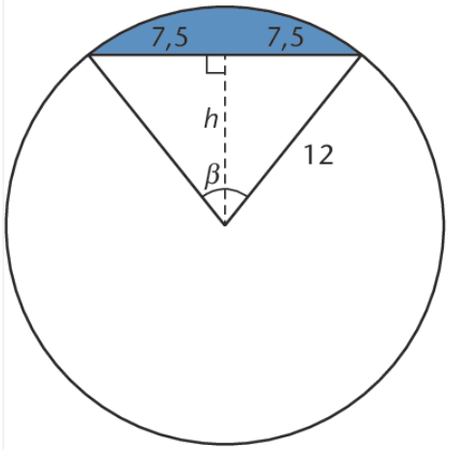
Esimerkki 5

Ympyrään, jonka säde on 12 cm, piirretään jänne. Jänteen pituus on 15 cm. Jänteen päätepisteisiin piirretyt säteet rajoittavat sektorin, jonka sisällä jänne kulkee.

a) Laske sektorin keskuskulma asteen tarkkuudella.

b) Määritä jänteen rajoittaman pienemmän segmentin ala.

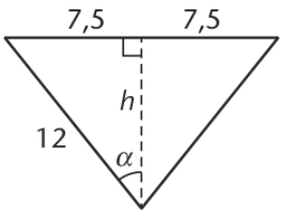
Ratkaisu



a) Piirretään mallikuva. Merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella β.

Muodostuvan tasakylkisen kolmion korkeusjana h jakaa kulman β kahteen osaan eli $\beta = 2\alpha$.

Ratkaistaan kulma α sinin avulla.



$$\sin\alpha = \frac{7{,}5}{12}$$
$$\alpha = 38{,}68...^\circ$$

Tällöin $\beta = 2 \cdot 38{,}68\ldots^\circ \approx 77^\circ$.

b) Segmentin eli varjostetun alueen ala saadaan vähentämällä sektorin alasta kuvan kolmion ala.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{77{,}36...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 97{,}218...$$

Kolmion korkeus h saadaan Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + 7{,}5^2 = 12^2$$
$$h^2 = 87{,}75$$
$$h = \pm 9{,}367...$$

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{15 \cdot 9{,}367...}{2} = 70{,}256...$$

$$A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} = 97{,}218\ldots - 70{,}256\ldots \approx 27\ \left(\text{cm}^2\right).$$

Vastaus

a) 77° **b)** $27\ \text{cm}^2$

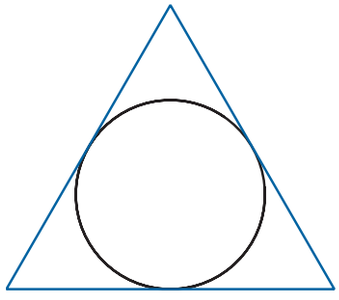
Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

302 Ympyrän ala on 4π. Laske ympyrän kehän pituuden tarkka arvo.

303 Ympyrän muotoisesta paperista leikataan sektorin muotoinen osa. Sektorin keskuskulman suuruus on $60°$. Laske sektorin piirin pituus (tarkka arvo), kun ympyrän säde on 30.

304 Tasasivuisen kolmion sisällä on suurin mahdollinen ympyrä. Laske ympyrän ala, kun kolmion sivun pituus on 2.

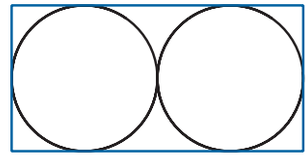


305 Neliöllä ja ympyrällä on sama piirin pituus. Ympyrän säde on r. Mikä on neliön ala ympyrän säteen avulla lausuttuna?

306 Puoliympyrän piiri on 10. Laske puoliympyrän säteen tarkka arvo.

307 Ympyrän ala on 25. Määritä tarkka arvo kehän pituudelle.

308 Määritä kuvan ympyröiden yhteisen pinta-alan suhde suorakulmion pinta-alaan.

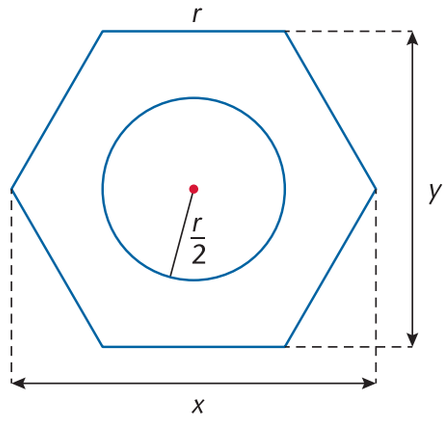


309 Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista säännöllistä kuusikulmiota, jonka sivun pituus on r.

a) Johda leveyden x lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

b) Johda korkeuden y lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.

c) Laske kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala, kun ympyrän säde on $r/2$. [S2012, 9]



Tehtäviä laskimen kanssa

310 Ympyrän kehän pituus on 10,25 m. Määritä ympyrän pinta-ala 0,01 neliömetrin tarkkuudella. [S2010, 2a]

311 Muinaiset egyptiläiset laskivat ympyrän pinta-alan sellaisen neliön alana, jonka sivun pituus on 8/9 ympyrän halkaisijasta.

a) Laske tällä säännöllä ympyrän ala, kun sen halkaisija on 5.

b) Onko edellä saatu ala liian suuri vai liian pieni? Kuinka suuri virhe on prosentteina? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella. [K2011, 4]

312 Kilpapyöräilijä ajaa 4 825 m matkan velodromin ympyrän muotoisella sisäradalla. Etäisyys sisäradalta velodromin keskelle on 48 m. Mikä on pyöräilijän keskimääräinen kierrosnopeus, kun koko matkaan aikaa kuluu 7 min 42 s?

313 Lentokone lentää troposfäärissä 9,50 km korkeudella päiväntasaajan yläpuolella länteen päin. Kuinka kauas länteen Maan pintaa pitkin lentokoneesta voi nähdä? Maapallon säde on 6 370 km.

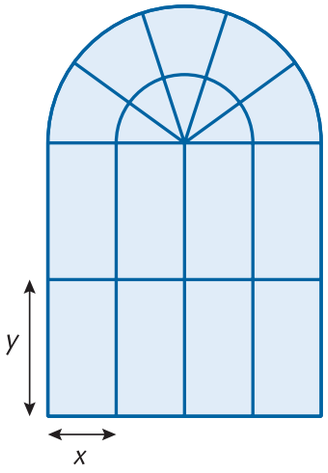
314 Kuinka kauas Maan pintaa pitkin voidaan nähdä Eiffel-tornin huipulta, kun tornin korkeus on 309,63 m? Maapallon säde on noin 6 370 km.

315 Jaakko katsoo 9,5 metrin päässä olevaa pyöreää mainospylvästä, jonka halkaisija on 1,5 m. Pylvääseen on kiinnitetty 1,0 metrin levyinen mainos. Missä kulmassa Jaakko näkee koko mainoksen?

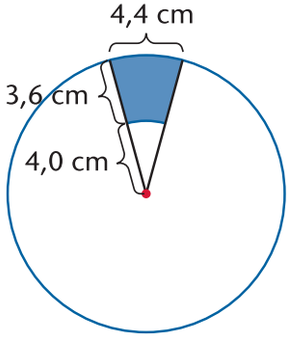
316 Helsingin Pasilassa sijaitsee linkkitorni, jonka korkeus meren pinnasta mitattuna on 146 metriä. Kuinka korkealta paikalta Tallinnasta tornin huippu on mahdollista nähdä, kun Helsingin ja Tallinnan välinen etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna on 85 km? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km. [S2008, 9]

317 Avaruusalus lentää suoraan päiväntasaajan yläpuolella. Aluksesta nähdään juuri ja juuri 45 % päiväntasaajasta 95 asteen kulmassa. Laske avaruusaluksen etäisyys maan pinnasta, kun maapallon säde on 6 370 km.

318 Kuvan kaari-ikkunassa on lasin tukena rimoja. Kuinka paljon rimaa tarvitaan kuvan mukaiseen kaari-ikkunaan, kun $x = 20$ cm ja $y = 40$ cm? Rimaa käytetään kaikkiin kuvion janoihin ja puoliympyröiden kaariin. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella. [S2013, 4]



319 Laske väritetyn kuvion ala.

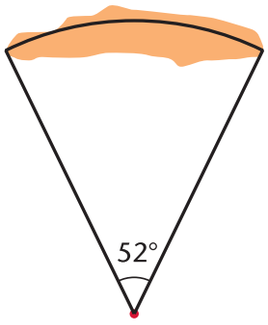


320 Pahvista leikataan ympyräsektorin muotoinen pala, joka taitetaan vappuhatuksi. Sektorin säde on 30 cm. Hattu tehdään henkilölle, jonka pään ympärysmitta on 58 cm. Laske tarvittavan pahvin pinta-ala.

321 Sadetin kastelee urheilukenttää 14 metrin päähän sektorissa, jonka keskuskulma on 105 astetta. Nurmikenttä vaatii 4 mm vettä. Kuinka kauan sadetinta on pidettävä toiminnassa, kun se käyttää 32 litraa vettä minuutissa? Oletetaan, että sadettimen vesi jakaantuu sektorille tasaisesti. [S2009, 5]

322 Kuinka suuri on sen ympyrän säde, jonka kehällä olevaa 5,1 metrin pituista kaarta vastaa 9 asteen keskuskulma? [S2005, 7]

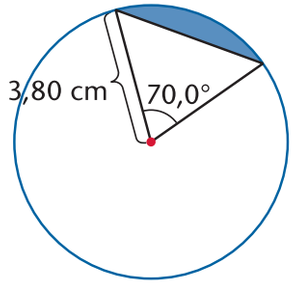
323 Laivan tutkan valvontasektorin keskuskulma on 52°. Tutkakuvan yläreunassa näkyi saari, joka leveydeltään mahtuu juuri ja juuri tutkan valvontasektoriin. Laske saaren leveys, kun tutkan pyyhkäisemän sektorin muotoisen alueen pinta-ala on 440 km^2.



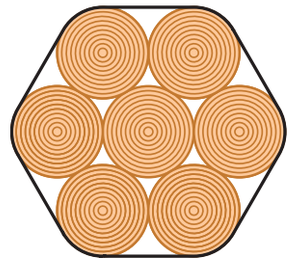
324 Ympyrästä leikataan sektorin muotoinen alue. Sektorin piiri on 56 cm. Laske ympyrän säteen pituus, kun sektorin keskuskulma on 40°.

325 Kuvio koostuu kahdesta puoliympyrästä sekä suorakulmiosta. Kuvion ympärysmitta on 120 cm. Laske kuvion ala, kun puoliympyrän säde on 8,0 cm.

326 Laske väritetyn alueen ala.



327 Seitsemän mäntytukkia sidotaan vaijerilla alla olevan poikkileikkauskuvion mukaisesti. Kuinka paljon vaijeria tarvitaan yhteen kierrokseen? Jokaisen tukin halkaisija on 20 cm. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella. [K2014, 7]



328 Neliön piiri on yhtä pitkä kuin ympyrän kehä.

a) Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on pienempi kuin ympyrän pinta-ala?

b) Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on suurempi kuin neliön pinta-ala? Anna vastaukset prosentin kymmenesosan tarkkuudella. [K2013, 9]

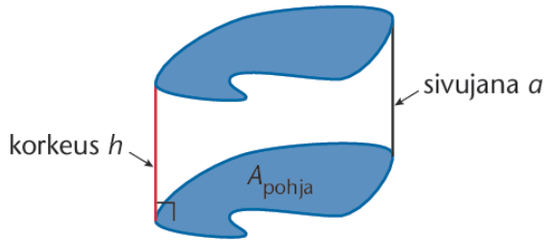
329 Ajatellaan, että Helsingistä Brysseliin kaivetaan liikennetunneli, joka yhdistää kaupungit suoraviivaisesti maapallon jännettä pitkin. Miten syvällä on tunnelin syvin kohta? Kuinka monen asteen kaltevuudessa tunneliin ajetaan sen kummassakin päätepisteessä? Maapallon säde on 6 370 km. Helsingin ja Brysselin välinen lyhin etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna on 1650 km. [S2001, 10]

330 Ympyrän sisään (kärjet ympyrän kehällä) piirretään säännöllinen 12-sivuinen monikulmio. Määritä monikulmion piirin pituus ympyrän säteen r avulla lausuttuna. Jos ympyrän kehän pituus korvataan monikulmion piirin pituudella, niin kuinka monen numeron tarkkuudella luvun π arvo saadaan tällä tavalla lasketuksi?[S2000, 12]

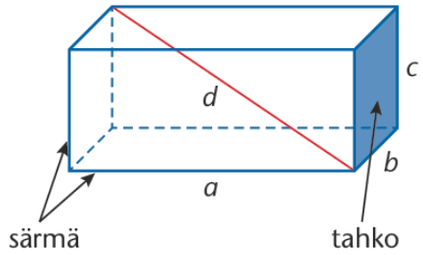
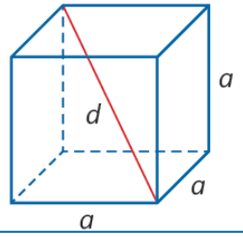
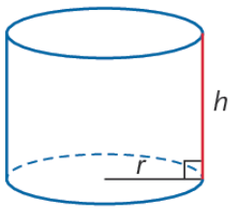
11 Avaruusgeometria

Lieriö

- **Lieriö** on avaruuskappale, jota rajoittaa:
  - kaksi **pohjaa**, jotka ovat keskenään yhdensuuntaisia, samanmuotoisia ja samankokoisia tasokuviota
  - **vaippa**, joka muodostuu, kun pohjia yhdistävä **sivujana** kiertää pohjan reunaviivan ympäri.



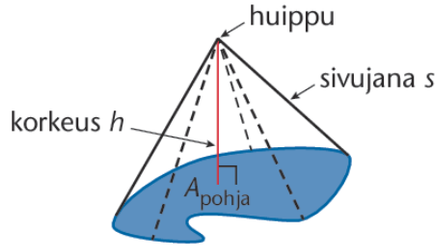
- Lieriön **korkeus** on pohjien välinen kohtisuora etäisyys.
- **Suoralla lieriöllä** sivujana on kohtisuorassa pohjia vastaan. Tällöin lieriön sivujanan pituus on sama kuin lieriön korkeus.
- Lieriön vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = p_{\text{pohja}} \cdot h$
- Lieriön tilavuus: $V = A_{\text{pohja}} \cdot h$

Lieriö	Ominaisuuksia	Laskukaavoja
Suorakulmainen särmiö 	• Pohja on suorakulmio. • Särmiön vaippa ja pohjat muodostuvat tahkoista. • Tahkoja erottavat särmät. • Avaruuslävistäjä kulkee särmiön vastakkaisesta nurkasta toiseen.	• Vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = (2a + 2b)c$ • Tilavuus: $V = abc$ • Avaruuslävistäjän pituus: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Kuutio 	• Kaikki särmät ovat yhtä pitkiä. • Kaikki tahkot ovat neliöitä.	• Vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = 4a^2$ • Tilavuus: $V = a^3$ • Avaruuslävistäjän pituus $d = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$
Ympyrälieriö 	• Pohja on ympyrä.	• Vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = 2\pi rh$ • Tilavuus: $V = \pi r^2 h$

Kartio

- **Kartio** on avaruuskappale, joka koostuu yhdestä **pohjasta** ja vaipasta.

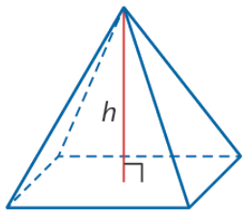
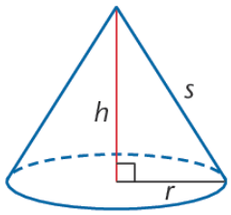
- Kartion **vaippa** syntyy, kun kartion huipusta pohjan reunaviivaan piirretty **sivujana** kiertää pohjan ympäri.



- Kartion **korkeus** on huipusta pohjaa vastaan piirretyn kohtisuoran janan pituus.

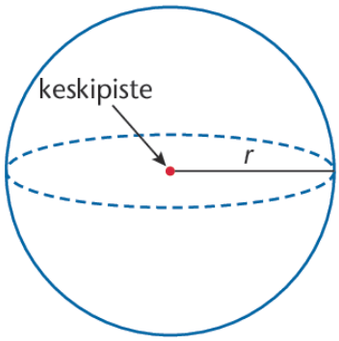
- **Suoralla kartiolla** korkeusjanan toinen päätepiste on pohjan keskipiste.

- Kartion tilavuus: $V = \dfrac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3}$

Lieriö	Ominaisuuksia	Laskukaavoja
Pyramidi 	• Pohja on monikulmio. • Kartion vaippa muodostuu kolmioista, joiden määrä ja muoto riippuvat kartion pohjan muodosta.	• Vaipan ala saadaan sivutahkoina olevien kolmioiden pinta-alojen avulla. • Pyramidin tilavuus: $V = \dfrac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3}$
Ympyräkartio 	• Pohja on ympyrä. • Kartion vaippa on ympyrän sektorin muotoinen.	• Vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = \pi rs$ • Tilavuus: $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Pallo

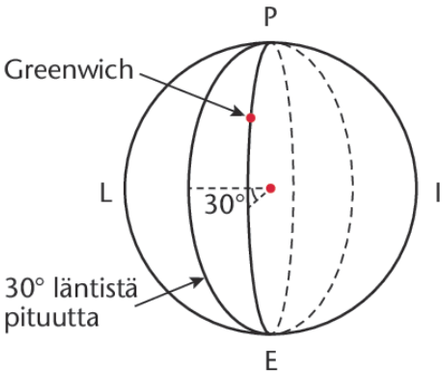
- **Pallopinta** muodostuu niistä kolmiulotteisen avaruuden pisteistä, joiden etäisyys kiinteästä pisteestä on vakio.
  - Kiinteää pistettä kutsutaan pallon **keskipisteeksi**.
  - Pallopinnan pisteiden etäisyyttä keskipisteestä kutsutaan **säteeksi** r.

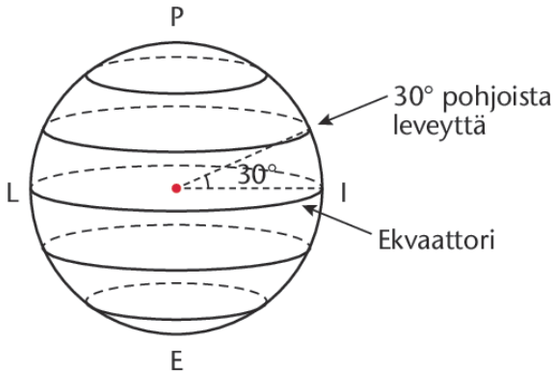


- Pallon pinta-ala: $A = 4\pi r^2$

- Pallon tilavuus: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

- Maapallo voidaan ajatella jaettavaksi **pituuspiireihin** eli **meridiaaneihin**, jotka ovat isoympyröiden puolikkaita, joiden päätepisteinä ovat Etelä- ja Pohjoisnapa.





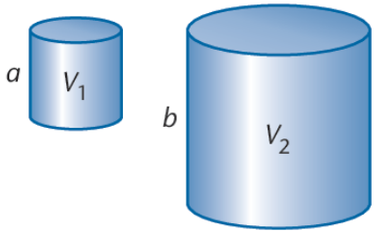
- Päiväntasaaja on pisin **leveyspiiri**. Sen pituus on maapallon kehän pituus. Muut leveyspiirit ovat saman tason suuntaisia kuin päiväntasaaja, mutta niiden kehä on lyhyempi.

Tilavuuksien suhde

- Yhdenmuotoisilla kappaleilla vastinsivujen suhde eli **mittakaava** on vakio.

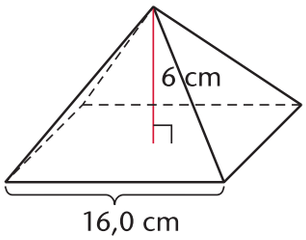
- Yhdenmuotoisilla kappaleilla **tilavuuksien suhde** on yhtä suuri kuin mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

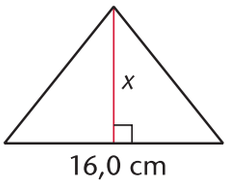


Esimerkki 1

Suoran neliöpohjaisen pyramidin pohjasivun pituus on 16,0 cm ja korkeus 6,0 cm. Laske pyramidin vaipan ala.

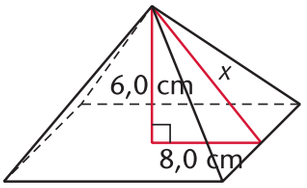


Ratkaisu Vaippa koostuu neljästä keskenään samanlaisesta tasasivuisesta kolmiosta.



Kolmioiden kanta on 16,0 cm ja korkeus x saadaan ratkaistua Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$
$$x^2 = 64 + 36$$
$$x^2 = 100$$
$$x = \pm 10$$



Koska sivun pituus aina positiivinen, sivutahkona olevan kolmion korkeus $x = 10{,}0$ (cm).

Yhden kolmion pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{16{,}0 \text{ cm} \cdot 10{,}0 \text{ cm}}{2}$$
$$= 80 \text{ cm}^2$$

Tällöin koko kartion vaipan ala on

$$A_{\text{vaippa}} = 4 \cdot A_{\text{kolmio}}$$
$$= 4 \cdot 80 \text{ cm}^2$$
$$= 320 \text{ cm}^2$$

Vastaus Kartion vaipan ala on 320 cm^2.

Esimerkki 2

Seikkailuelokuvassa ”Ytimessä” tiedemiesryhmä porautuu Maan keskuksessa sijaitsevaan nestemäisestä nikkeli-rautaseoksesta koostuvaan ytimeen käynnistämään Maan pyörimisliikkeen uudelleen.

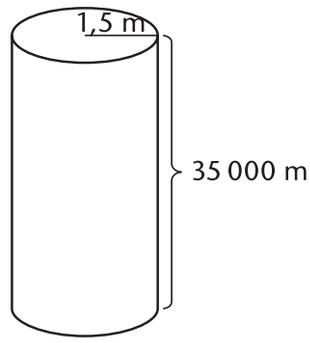
a) Oletetaan, että Maan kiinteään kuoreen porattaisiin tällä tavoin pyöreä, halkaisijaltaan 3,0 m:n suuruinen suoran lieriön muotoinen käytävä, joka ulottuisi 35 km:n syvyydessä alkavaan nestemäiseen kiviainekseen saakka. Mikä olisi tämän käytävän tilavuus?

b) Kuinka suuri olisi syntyneen käytävän seinäpinta-ala? Anna vastaus hehtaareina.

Ratkaisu

a) Muodostuva onkalo on suora ympyrälieriö, jonka pohjaympyrän säde on puolet reiän halkaisijasta eli 1,5 m.

Lieriön korkeus on 35 km = 35 000 m.



Tällöin

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\ &= \pi \cdot (1{,}5\,\text{m})^2 \cdot 35\,000\ \text{m} \\ &= 247\,400{,}42...\ \text{m}^3 \\ &\approx 250\ 000\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

b) Lasketaan lieriön vaipan ala. Käytävän ”pohjaympyrän” kehän pituus

$p = \pi d = \pi \cdot 3{,}0\,\text{m}.$

Vaipan ala

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= ph \\ &= \pi \cdot 3{,}0\ \text{m} \cdot 35\,000\ \text{m} \\ &= 329\,867{,}2...\ \text{m}^2 \\ &= 32{,}98672\ \text{ha} \\ &\approx 33\ \text{ha}. \end{aligned}$$

Vastaus

a) Käytävän tilavuus on 250 000 m^3.
b) Seinämän pinta-ala on 33 ha.

Esimerkki 3

Puusta valmistetun askartelupallon tilavuus on 14,5 cm^3.

a) Laske pallon pinta-ala.

b) Laske pallon massa, kun puun tiheys on 0,50 g/cm^3.

Ratkaisu

a) Pallon pinta-alan laskemiseksi tarvitaan pallon säde.

Ratkaistaan säde tilavuuden avulla. Pallon tilavuus on 14,5 cm^3, joten saadaan yhtälö

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 14{,}5 \quad |\cdot 3$$

$$4\pi r^3 = 43{,}5 \quad |:(4\pi)$$

$$r^3 = \frac{43{,}5}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{43{,}5}{4\pi}}$$

$$r = 1{,}5127\ldots \ \text{(cm)}$$

Pallon pinta-ala

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (1{,}5127\ldots\text{cm})^2 = 28{,}756\ldots\ \text{cm}^2 \approx 28{,}8\text{cm}^2$$

b) Lasketaan massa tilavuuden ja tiheyden avulla.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad |\cdot V$$

$$m = \rho V = 0{,}50\,\text{g/cm}^3 \cdot 14{,}5\,\text{cm}^3 = 7{,}25\ \text{g} \approx 7{,}3\text{g}$$

Vastaus

a) Pallon pinta-ala on 28,8 cm^2.

b) Pallon massa on 7,3 g.

Esimerkki 4

Norjassa sijaitseva tunturi, jonka korkeus on 1,55 km, on likimain suoran ympyräkartion muotoinen. Merenpinnan tasolla tunturia kiertää polku. Retkikunta kiertää tunturin ympäri 39 tunnissa, kun retkikunnan keskinopeus on $2{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

a) Jos koko tunturi louhittaisiin soraksi, kuinka monta kuorma-autolastillista soraa siitä saataisiin, kun yhteen lastiin mahtuu soraa 18 m^3?

b) Jos tunturi istutettaisiin täyteen puun taimia, kuinka monta tainta tarvittaisiin, kun puiden istutustiheys on 1 taimi/5 m^2?

Ratkaisu

a) Kartion tilavuuden laskemiseksi on tiedettävä sen pohjaympyrän ala. Pohjaympyrän alan laskemiseksi puolestaan pitää ensin selvittää ympyrän säteen pituus.

Selvitetään ympyrän säde kehän pituuden avulla. Ympyrän kehän pituus voidaan laskea retkikunnan nopeuden v ja matkaan s käytetyn ajan t avulla.

$v = 2{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$
$t = 39\ \text{h}$

$$v = \frac{s}{t} \quad |\cdot t$$

$$s = vt = 2{,}4\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 39\ \text{h} = 93{,}6\ \text{km}$$

Pohjaympyrän kehän pituus on siis 93,6 km. Ratkaistaan tämän avulla pohjaympyrän säde r.

$$p = 2\pi r \quad |:(2\pi)$$

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{93{,}6\,\text{km}}{2\pi} = 14{,}89...\,\text{km}$$

Kartion tilavuus V on tällöin

$$V = \frac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3}$$

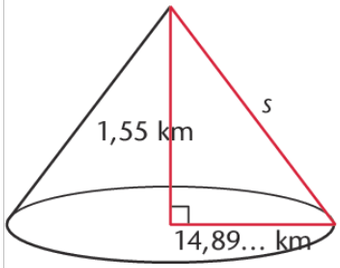
$$= \frac{\pi \cdot (14{,}89...\,\text{km})^2 \cdot 1{,}55\,\text{km}}{3}$$

$$= 360{,}207...\,\text{km}^3$$

$$= 3{,}602... \cdot 10^{11}\,\text{m}^3$$

Tästä määrästä saataisiin soraa kuorma-autolastillisina

$$\frac{3{,}602\ldots \cdot 10^{11}\ \text{m}^3}{18\,\text{m}^3} = 2{,}0011\ldots \cdot 10^{10} \approx 2{,}0 \cdot 10^{10}\ \text{lastillista.}$$



b) Taimien määrän selvittämiseksi on laskettava tunturin vaipan ala.

Lasketaan sivujanan s pituus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$s^2 = 1{,}55^2 + 14{,}89\ldots^2$$
$$s^2 = 224{,}32\ldots$$
$$s = \pm\sqrt{224{,}32\ldots}$$
$$s = \pm 14{,}977\ldots$$

Koska pituus on aina positiivinen, $s = 14{,}977\ldots$ km.

Tunturin vaipan ala

$$A_{\text{vaippa}} = \pi rs$$
$$= \pi \cdot 14{,}89\ldots\,\text{km} \cdot 14{,}977\ldots\,\text{km}$$
$$= 700{,}938\ldots\,\text{km}^2$$

Muutetaan pinta-ala neliömetreiksi.

$$700{,}9387242\ldots\ \text{km}^2 = 700\,938\,724{,}2\ldots\ \text{m}^2$$

Yksi taimi vaatii tilaa 5 m^2, joten taimia tarvitaan

$$\frac{700\,938\,724{,}2\ldots\text{m}^2}{5\,\text{m}^2} = 140\,187\,744{,}8\ldots \approx 140\,000\,000\ \text{(kpl)}.$$

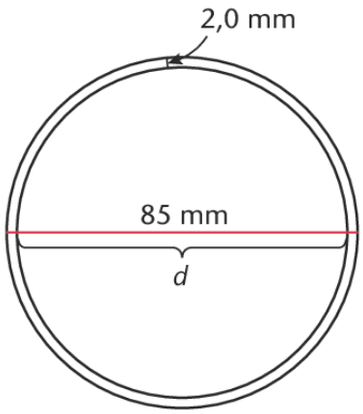
Vastaus

a) Saataisiin $2{,}0 \cdot 10^{10}$ kuorma-autolastillista soraa.
b) Tarvittaisiin 140 miljoonaa tainta.

Esimerkki 5

Suoran ympyrälieriön muotoisen maljakon ulkohalkaisija on 85 mm ja lasiseinämän paksuus 2,0 mm. Maljakkoon kaadetaan 0,5 litraa vettä. Kuinka korkealle vesi maljakossa nousee?

Ratkaisu



Maljakon sisähalkaisija

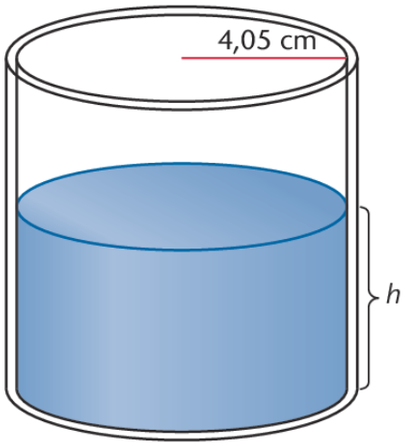
$$d = 85\text{ mm} - 2 \cdot 2{,}0\text{ mm} = 81\text{ mm}.$$

Maljakon sisäosan säde on tällöin

$$r = \frac{d}{2} = \frac{81\text{mm}}{2} = 40{,}5\text{mm} = 4{,}05\text{cm}.$$

Muodostetaan tilavuuden avulla yhtälö ja ratkaistaan veden korkeus h. Muutetaan ensin veden tilavuus kuutiomitoiksi (cm^3):

$$0{,}5\text{ l} = 0{,}5\text{ dm}^3 = 0{,}5 \cdot 1000\text{ cm}^3 = 500\text{ cm}^3$$



Saadaan siis yhtälö $V = 500$.

$$\pi r^2 \cdot h = 500$$

$$\pi \cdot 4{,}05^2 \cdot h = 500 \quad |:(\pi \cdot 4{,}05^2)$$

$$h = \frac{500}{\pi \cdot 4{,}05^2}$$

$$h = 9{,}703...$$

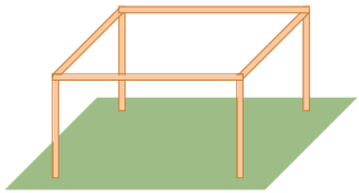
$$h \approx 9{,}7\ \text{(cm)}$$

Vastaus

Vesi nousee maljakossa 9,7 cm:n korkeudelle.

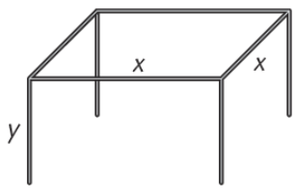
Esimerkki 6

Terassille rakennetaan katosta varten oheisen kuvan muotoinen kehikko laudoista. Kehikon rakentamiseen on käytettävissä lautaa yhteensä 22,0 m. Katoksen pohja halutaan tehdä neliön muotoiseksi. Millaiset tulisi kehikon mittojen olla, jotta katoksen tilavuus olisi mahdollisimman suuri?



Ratkaisu

a) Katoksen pohja on neliön muotoinen. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x ja katoksen korkeutta kirjaimella y.



Koska pituudet ovat positiivisia lukuja, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.

Koska lautaa on käytössä 22,0 m, saadaan lautojen pituuksista yhtälö:

$$4x + 4y = 22$$

$$4y = 22 - 4x \quad |:4$$

$$y = \frac{22}{4} - x = \frac{11}{2} - x$$

Koska $y \geq 0$, niin

$$\frac{11}{2} - x \geq 0$$

$$x \leq \frac{11}{2}.$$

Katoksen tilavuus halutaan mahdollisimman suureksi, joten muodostetaan funktio katoksen tilavuudesta.

$$V(x) = x^2 y = x^2\left(\frac{11}{2} - x\right) = \frac{11}{2}x^2 - x^3$$

Funktion V derivaatta on

$$V'(x) = 11x - 3x^2$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$V'(x) = 0$$

$$11x - 3x^2 = 0$$

$$x(11 - 3x) = 0$$

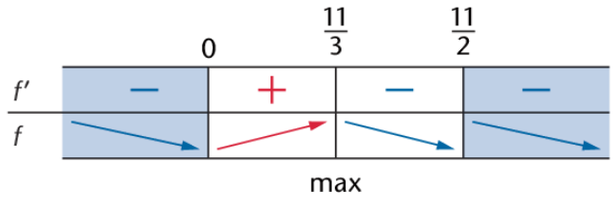
$x = 0$ tai $11 - 3x = 0$

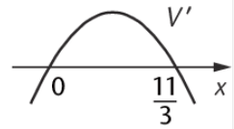
$$-3x = -11 \quad |:(-3)$$

$$x = \frac{11}{3}$$

$0 \le x \le \frac{11}{2}$

Etsitään ääriarvokohdat merkki- ja kulkukaavion avulla.





Tilavuus on suurin, kun $x = \frac{11}{3} = 3{,}666... \approx 3{,}7$ (m)

Tällöin katoksen korkeus

$$y = \frac{11}{2} - \frac{11}{3} = 1{,}833... \approx 1{,}8 \text{ (m)}$$

Vastaus Katoksen tilavuus on suurin, kun pohjan mitat 3,7 m × 3,7 m ja katoksen korkeus 1,8 m.

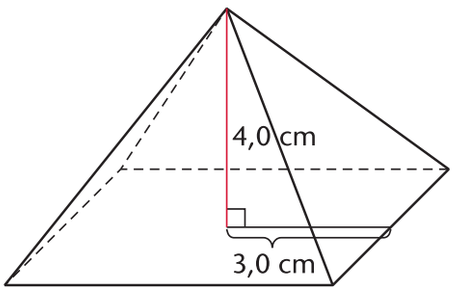
Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

331 Kuution särmän pituus on 2 m. Särmä puolitetaan. Kuinka paljon alkuperäistä kuutiota pienempi on uuden kuution
a) tilavuus
b) kokonaispinta-ala?

332 Suorakulmaisen särmiön tilavuus on 24 litraa. Laske särmiön korkeus, kun pohjan mitat ovat 20 cm × 30 cm.

333 Laske neliöpohjaisen pyramidin
a) tilavuus
b) vaipan ala.



334 Pöydällä on kaksi yhdenmuotoista maljakkoa. Suuremman maljakon korkeus on 30 cm ja pienemmän 15 cm. Laske suuremman maljakon tilavuus, kun pienemmän maljakon tilavuus on 0,4 litraa.

Tehtäviä laskimen kanssa

335 Suorakulmaisen särmiön pohjan mitat ovat 4,5 cm × 20,3 cm. Särmiön korkeus on 5,0 cm. Laske särmiön
a) tilavuus
b) vaipan ala
c) avaruuslävistäjän pituus.

336 Pallon tilavuus on 1 000 m^3. Laske pallon säde kolmen numeron tarkkuudella. [S2008, 2b]

337 Pallon pinta-ala on 132 cm^2. Laske pallon tilavuus.

338 Kuution särmän pituus puolittuu. Kuinka monta prosenttia pienenee kuution
a) tilavuus
b) sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala?
[K2014, 4]

339 Light Jaffaa myydään 0,5 litran ja 1,5 litran muovipulloissa. Pullot ovat yhdenmuotoiset.
a) Laske pienemmän pullon korkeus, kun ison pullon korkeus on 34 cm.
b) Kuinka monta prosenttia enemmän muovia on isommassa pullossa pikkupulloon verrattuna? Pullojen muovimäärä on suoraan verrannollinen niiden pinta-alaan.

340 Amerikkalaisessa museossa on aito sioux-wigwam, joka on suoran ympyräkartion muotoinen. Teltan tilavuus on 6,8 m^3 ja teltan korkeus 2,0 m. Kuinka paljon puhvelinnahkaa teltan valmistamiseen on käytetty? Teltassa on maalattia. Teltan huipussa olevan savuaukon alaa ei tarvitse ottaa huomioon.

341 Miesten kuulantyönnössä käyttämä kuula painaa keskimäärin 7,260 kg. Kuulan halkaisija on noin 1,2 dm.

a) Laske kuulan tiheys.

b) Naisten kuula valmistetaan samasta materiaalista. Laske naisten kuulan halkaisija, kun naisten kuula painaa noin 4,0 kg.

342 Suoran ympyrälieriön muotoisessa purkissa on hernekeittoa. Keiton massa on 435 g. Keiton tiheys on 0,940 kg/l. Keittoa on 95 % purkin tilavuudesta.

a) Laske purkin tilavuus kuutiosenttimetreinä.

b) Laske purkin pohjan säde, kun purkin korkeus on 11 cm.

343 Kumiputken ulkohalkaisija on 53 mm ja seinämän paksuus 4 mm. Kuinka pitkä on putken oltava, jotta putkeen mahtuisi 3,0 litraa vettä? [K2008, 4]

344 Tennispalloja myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa, johon mahtuu neljä palloa tiiviisti päällekkäin pakattuna. Tennispallon halkaisija on 6,68 cm. Kuinka monta prosenttia pakkauksen tilavuudesta pallot täyttävät? Anna vastaus prosentin tarkkuudella. [K2013, 6]

345 Kuparipallon ympärysmitta on 64,2 cm ja massa 37,9 kg. Tutki, onko pallon sisällä tyhjää tilaa. Kuperin tiheys on 8,96 g/cm^3. [K2009, 6]

346 Talouspaperirullan korkeus on 21 cm, täyden rullan ulkohalkaisija on 12 cm ja sen sisähalkaisija 4,5 cm. Mikä on rullan halkaisija silloin, kun paperin tilavuudesta on jäljellä puolet? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella. [S2013, 6]

347 Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 2 ja 3. Kolmio pyörähtää täyden kierroksen lyhyemmän kateettinsa ympäri, jolloin syntyy avaruuskappale. Piirrä kappaleen kuva ja laske sen tilavuus. [K2010, 10]

348 Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 12,4 cm ja toinen terävä kulma 64,5°. Kolmio pyörähtää pidemmän kateettinsa ympäri. Laske syntyneen kartion tilavuus ja vaipan ala. [S2006, 8]

349 Etelämantereen jääpeitteen sulaessa valuu vuodessa mereen 150 kuutiokilometriä vettä. Jos tämä vesimäärä leviäisi tasaisesti kaikkiin valtameriin, kuinka monta millimetriä valtamerien pinta nousisi? Maapallon ympärysmitta on 40 000 kilometriä, ja valtameret peittävät 70 % maapallon pinnasta. [S2007, 7]

350 Neliöpohjaisen suoran pyramidin korkeus on 8 ja pohjasärmän pituus 12. Määritä pyramidin sivutahkon ala. Kuinka suuren kulman pyramidin sivusärmä muodostaa pohjatahkon kanssa? Ilmoita kulma 0,1 asteen tarkkuudella. [S2008, 7]

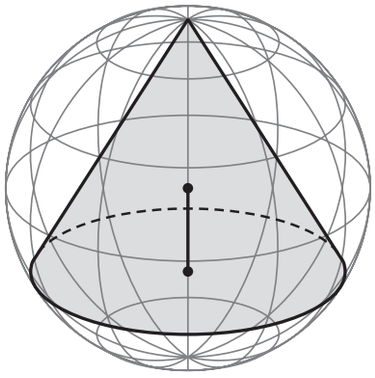
351 Suoran ympyrälieriön muotoisessa 10,0 cm:n korkuisessa lasissa on mehua 6,5 cm:n korkeuteen. Lasiin upotetaan viisi pallon muotoista lasikuulaa, joiden halkaisija on 20 mm. Mehun pinta nousee tällöin 7 mm. Laske lasin pohjan halkaisija. [S2009, 8]

352 Suoran ympyräkartion sisällä on suora ympyrälieriö, jonka pohja on kartion pohjalla ja yläreuna sivuaa kartion vaippaa. Lieriön pohjan halkaisija on yhtä suuri kuin sen korkeus. Toisaalta lieriön pohjan halkaisija on puolet kartion pohjan halkaisijasta. Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kartion tilavuudesta? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella. [S2012, 10]

353 Kannettoman, neliöpohjaisen muovisen laatikon valmistamiseen käytetään materiaalia sen verran, että laatikon pohjan ja seinien kokonaispinta-ala on 1 200 cm^2. Laatikon tilavuus halutaan mahdollisimman suureksi. Määritä laatikon tilavuus, korkeus ja pohjan sivun pituus. [K2004, 13]

354 Pienien alumiinista valmistettavien suoran ympyräkartion muotoisten valaisinkupujen korkeuden ja pohjan halkaisijan summa on 18,6 cm. Määritä kartion pohjaympyrän säde siten, että kartion tilavuus on mahdollisimman suuri. Määritä tämä tilavuus. [K2006, 13]

355 Pallon säde on 3. Määritä pallon sisään mahtuvan tilavuudeltaan mahdollisimman suuren suoran ympyräkartion tilavuus. Ympyräkartion kärki ja pohjaympyrän kehä ovat pallon pinnalla. Valitse muuttujaksi pohjan etäisyys pallon keskipisteestä. Ilmoita tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo. [K2007, 14]



12 Tilastot

Muuttujat ja jakaumat

- Tilastotieteessä tarkasteltavat **muuttujat** ovat tutkimuksen kohteen ominaisuuksia.

- Muuttujat ovat joko jatkuvia tai diskreettejä.
  - **Diskreetti muuttuja** voi saada vain tiettyjä esim. kokonaislukuarvoja.
  - **Jatkuva muuttuja** voi saada (määrittelyjoukossaan) mitä tahansa arvoja.

- **Jakaumilla** tarkoitetaan taulukkoa, johon on koottu tarkasteltavan muuttujan arvot sekä muuttujan arvoihin liittyvät lukumäärät tai prosenttiosuudet.
  - (Absoluuttinen) **frekvenssi *f*** kertoo muuttujan arvojen lukumäärän.
  - **Suhteellinen frekvenssi *f*%** kertoo absoluuttisen frekvenssin prosentteina.
  - **Summafrekvenssi *sf*** kuvaa muuttujan arvojen kertymää lukumäärien avulla.
  - **Suhteellinen summafrekvenssi *sf*%** kertoo kertymän prosentteina.

muuttuja *x*	*f*	*f*%	*sf*	*sf*%
1	5	29 %	5	29 %
2	6	35 %	11	64 %
3	2	12 %	13	76 %
4	4	24 %	17	100 %

- Tilastollisia laskuja varten jatkuvat muuttujat yleensä **luokitellaan**.

- Luokan **todellinen alaraja** on se luku, josta alkaen muuttujan arvot pyöristetään kyseiseen luokkaan kuuluviksi.

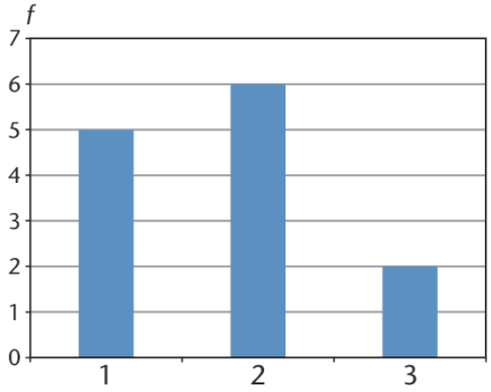
- Luokan **todellinen yläraja** on seuraavan luokan todellinen alaraja.

- Luokan **luokkakeskus** on luokan keskimmäinen arvo. Luokkakeskus lasketaan todellisten luokkarajojen keskiarvona.

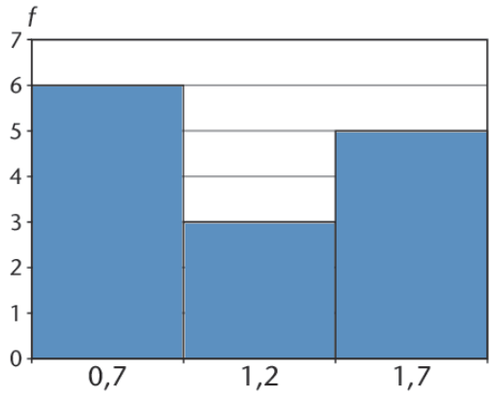
$$\text{luokkakeskus} = \frac{\text{todellinen alaraja} + \text{todellinen yläraja}}{2}$$

Kuvaajat

- Jakaumia havainnollistetaan erilaisilla **kuvaajilla**.
- **Pylväsdiagrammissa** pylvään korkeus määräytyy muuttujan arvon frekvenssin mukaan. Pylväsdiagrammeilla kuvataan joko absoluuttisia tai suhteellisia frekvenssejä.

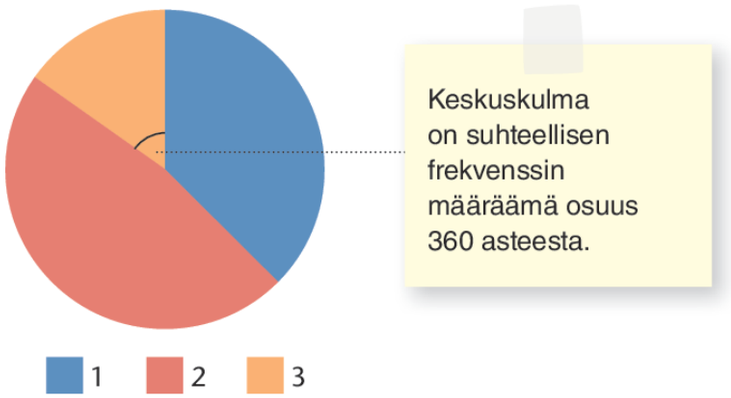


Diskreetin muuttujan pylväät piirretään erilleen. Muuttujan arvot sijoitetaan pylvään alapuolelle.

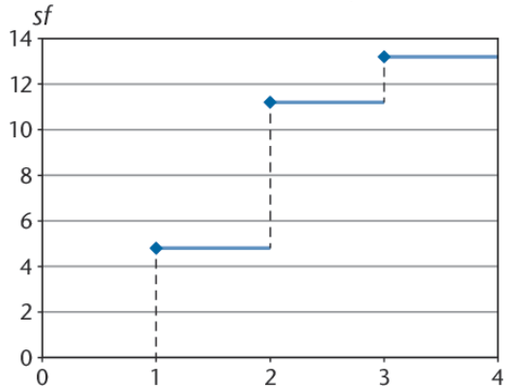


Jatkuvan muuttujan pylväät piirretään yhteen. Kuvaajaa kutsutaan tällöin **histogrammiksi**. Pylväiden keskikohdalle merkitään kunkin luokan luokkakeskus.

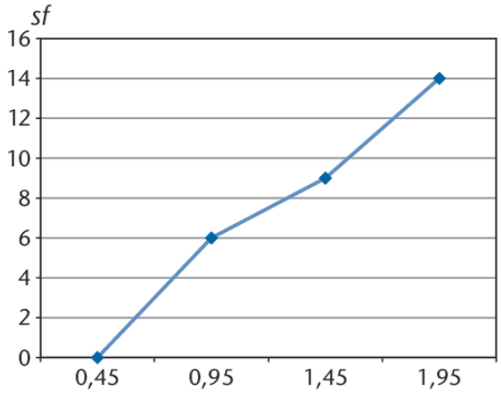
- **Sektoridiagrammissa** sektorin keskuskulma määräytyy suhteellisen frekvenssin mukaan. Sektoridiagrammilla kuvataan joko absoluuttisia tai suhteellisia frekvenssejä.



- Summafrekvenssit (*sf* ja *sf*%) kuvaavat kertymää, joten niiden kuvaajat alkavat aina vaaka-akselilta ja ovat nousevia murtoviivoja.



Diskreetin muuttujan summafrekvenssiä kuvataan **porrasdiagrammilla**.



Jatkuvan muuttujan summafrekvenssiä kuvataan **viivadiagrammilla**.

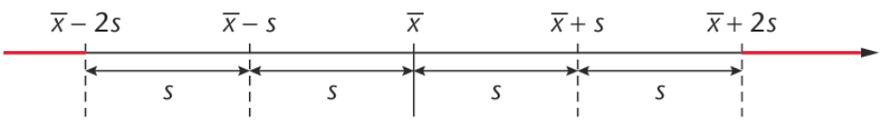
Tunnusluvut ja normittaminen

- **Tunnusluvut** tiivistävät tilastollisen aineiston ominaisuuksia yhdeksi luvuksi.
- **Moodi Mo** eli tyyppiarvo on aineiston yleisin arvo. Frekvenssijakaumassa moodin frekvenssi on suurin.
- **Mediaani Md** on suuruusjärjestykseen laitetun aineiston keskimmäinen arvo. Se jakaa aineiston kahteen yhtä suureen osaan. Suhteellisessa summafrekvenssijakaumassa mediaani on se muuttujan arvo, jonka kohdalla suhteellinen summafrekvenssi ensimmäisen kerran ylittää 50 %.
- **Artimeettinen keskiarvo** $\bar{x}$ on muuttujan keskimääräinen arvo. Keskiarvo lasketaan jakamalla muuttujan arvojen summa muuttujan arvojen lukumäärällä.
- **Keskihajonta** s kertoo, miten kaukana havainnot keskimäärin ovat keskiarvosta.

	Keskiarvo $\bar{x}$	Keskihajonta s_n	Otoskeskihajonta s_{n-1}
Ilman frekvenssi-jakaumaa	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
Frekvenssi-jakauman avulla	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}$	$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Tunnusluvut on helppo määrittää laskimen tilasto-toiminnoilla.

- **Painotetussa keskiarvossa** jokaisella luvulla on oma painokertoimensa. Mitä suurempi painokerroin luvulla on, sitä merkityksellisempi luku on kyseessä. Painotettua keskiarvoa laskettaessa:
  1. Kerrotaan jokainen muuttujan arvo x_i omalla painokertoimellaan.
  2. Saadut tulot lasketaan yhteen.
  3. Summa jaetaan painokertoimien summalla.
- Jos muuttujan arvo on enemmän kuin kahden keskihajonnan päässä keskiarvosta, arvon voidaan sanoa poikkeavan merkitsevästi keskiarvosta.



- **Normitetun arvon** z avulla voidaan vertailla aineistoja, joissa keskiarvot ja keskihajonnat poikkeavat toisistaan.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

Esimerkki 1

Muuttujan arvot ovat: 0, 0, 1, 2, 2, 3.

a) Määritä muuttujan arvon moodi, mediaani ja keskiarvo.

b) Muodosta frekvenssijakauma ja piirrä frekvenssijakauman kuvaaja.

Ratkaisu

a) Moodi on yleisin arvo.

$\text{Mo} = 0$ ja $\text{Mo} = 2$

Moodi on ainoa tunnusluku, jolla voi olla useita arvoja.

Mediaani on keskimmäinen arvo. Koska aineistossa on kaksi keskimmäistä muuttujan arvoa, mediaani on näiden keskiarvo.

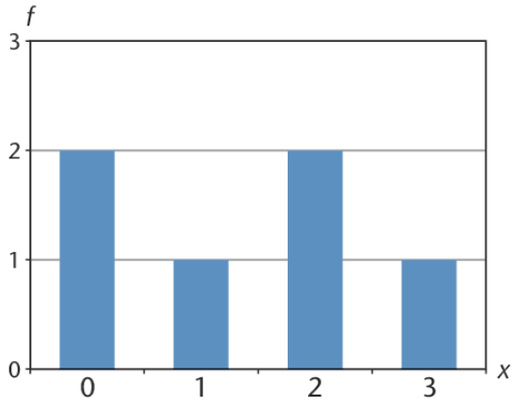
0, 0, **1, 2**, 2, 3

$$\text{Md} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Keskiarvo } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \frac{0+0+1+2+2+3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

b) Muodostetaan frekvenssijakauma ja piirretään pylväsdiagrammi.

x	f
0	2
1	1
2	2
3	1



Vastaus

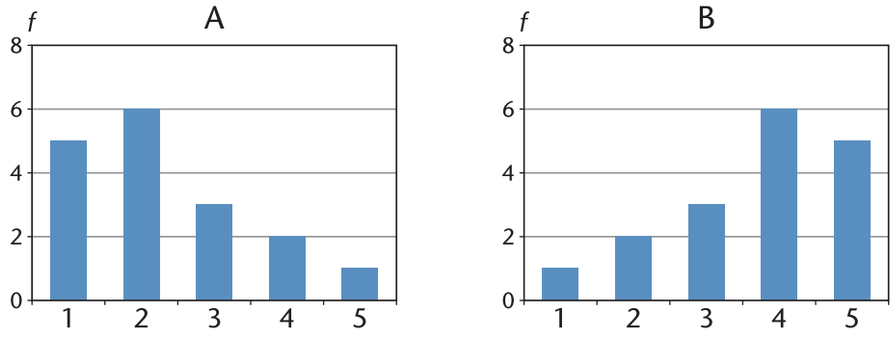
a) $\text{Mo} = 0$ ja $\text{Mo} = 2$, $\text{Md} = 1\frac{1}{2}$, $\bar{x} = 1\frac{1}{3}$

Esimerkki 2

Samasta havaintoaineistosta tarkasteltiin kahta muuttujaa A ja B. Päättele muuttujien A ja B frekvenssijakaumien perusteella, kummalla muuttujalla on suurempi

a) moodi **b)** keskiarvo.

Perustele vastauksesi.



Ratkaisu

a) Moodi on yleisin arvo eli se muuttujan arvo, jonka frekvenssi on suurin. Frekvenssijakauman kuvaajassa tämä näkyy korkempana pylväänä.

Muuttujan A moodi $\text{Mo}_A = 2$ ja muuttujan B moodi $\text{Mo}_B = 4$, joten muuttujan B moodi on suurempi.

b) Jakaumien perusteella kummankin muuttujan jakaumissa on yhtä paljon havaintoyksiköitä. Tällöin keskiarvo on suurempi siinä jakaumassa, missä muuttujan arvojen summa on suurempi.

- Muuttuja A: $1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 39$
- Muuttuja B: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 = 63$

Koska muuttujan B arvojen summa on suurempi kuin muuttujan A arvojen summa, muuttujan B keskiarvo on suurempi.

Vastaus

a) Muuttujan B moodi on suurempi.
b) Muuttujan B keskiarvo on suurempi.

Esimerkki 3

Anna heittää noppaa. Hänen heittotulokset on koottu alla olevaan taulukkoon.

Nopan silmäluku	Frekvenssi
1	5
2	7
3	3
4	4
5	8
6	2

a) Laske nopan silmälukujen keskiarvo. Pyöristä vastauksesi yhden desimaalin tarkkuuteen.

b) Laske nopan silmälukujen keskihajonta. Pyöristä vastauksesi yhden desimaalin tarkkuuteen.

c) Myös Petrus heittää noppaa. Hänen heittotuloksista laskettu keskiarvo nopan silmäluvuille on 3,5 ja keskihajonta 2,0. Kumman heittosarja (Annan vai Petruksen) on tasaisempi? Perustele vastauksesi.

Ratkaisu

a) Lasketaan keskiarvo joko keskiarvon kaavalla tai suoraan laskimen tilastotoiminnoilla.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{29} = \frac{96}{29} \approx 3{,}3$$

b) Lasketaan keskihajonta joko keskihajonnan kaavalla tai suoraan laskimen tilastotoiminnoilla.

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$s_{29} = \sqrt{\frac{5 \cdot \left(1 - \frac{96}{29}\right)^2 + \ldots + 2 \cdot \left(6 - \frac{96}{29}\right)^2}{29}} = 1{,}642\ldots \approx 1{,}6$$

c) Heittosarja on tasaisempi henkilöllä, jonka heittotulosten keskihajonta on pienempi.

Koska Annan heittotulosten keskihajonta (1,6) on pienempi kuin Petruksen heittotulosten keskihajonta (2,0), on Annan heittosarja tasaisempi.

Vastaus

a) Keskiarvo on 3,3. **b)** Keskihajonta on 1,6.
c) Annan heittosarja on tasaisempi.

Esimerkki 4

Taulukossa on esitetty Suomen työttömyysasteita (%) vuosina 2000–2010.

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
9,8	9,1	9,2	9,0	8,8	8,4	7,7	6,9	6,4	8,2	8,4

Arvioi keskihajonnan avulla, poikkeaako vuoden 2000 työttömyysaste merkitsevästi keskiarvosta.

Ratkaisu Lasketaan ensin keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{9{,}8+9{,}1+9{,}2+\ldots+8{,}2+8{,}4}{11} = 8{,}354\ldots\ (\%)$$

Työttömyysasteen keskihajonta on tällöin

$$s = \sqrt{\frac{(9{,}8-8{,}354\ldots)^2+(9{,}1-8{,}354\ldots)^2+\ldots+(8{,}4-8{,}354\ldots)^2}{11}}$$
$$= 0{,}970\ldots\ (\%)$$

Poikkeaminen on merkitsevää, jos muuttujan arvo eroaa yli kahden keskihajonnan verran keskiarvosta.

Poikkeama voi siis olla korkeintaan

$$2s = 2 \cdot 0{,}970\ldots = 1{,}941\ldots(\%)$$

Lasketaan vuoden 2000 työttömyysasteen poikkeama keskiarvosta.

$$9{,}8 - 8{,}354\ldots = 1{,}445\ldots < 1{,}941\ldots$$

Vuoden 2000 työttömyysaste poikkeaa alle kahden keskihajonnan verran eli poikkeaminen ei ole merkitsevää.

Vastaus Vuoden 2000 työttömyysaste ei poikkea merkitsevästi keskiarvosta.

Esimerkki 5

Lukiossa on pidetty vuoden aikana kuusi kertaa kurssi MB1. Kurssikokeista on laskettu ryhmien keskiarvot, jotka viiden ensimmäisen kurssin osalta olivat seuraavat

Koe 1	Koe 2	Koe 3	Koe 4	Koe 5
7,2	7,1	7,8	7,0	6,8

Mikä oli kuudennen ryhmän kokeen keskiarvo, kun kaikkien kuuden kokeen keskiarvojen keskiarvo oli 7,23?

Ratkaisu Merkitään puuttuvan kokeen keskiarvoa kirjaimella x. Koska kaikkien keskiarvojen keskiarvo on 7,23, saadaan yhtälö

$$\frac{7{,}2+7{,}1+7{,}8+7{,}0+6{,}8+x}{6} = 7{,}23 \quad |\cdot 6$$

$$7{,}2+7{,}1+7{,}8+7{,}0+6{,}8+x = 43{,}38$$

$$35{,}9+x = 43{,}38$$

$$x = 7{,}48 \approx 7{,}5$$

Vastaus Kuudennen ryhmän kokeen keskiarvo oli 7,5.

Esimerkki 6

Erään oppilaitoksen sisäänpääsy määräytyi lukion päättötodistuksesta lasketun painotettu keskiarvo perusteella. Seuraavassa taulukossa on koottu Niilon todistuksesta huomioitavat numerot sekä niiden painokertoimet.

Oppiaine	Niilon arvosana	Painokerroin
Matematiikka	9	2,0
Fysiikka	7	1,5
Kemia	8	1,5
Biologia	6	1,0
Äidinkieli	7	2,0

Pääseekö Niilo opiskelemaan kyseiseen oppilaitokseen, kun sisäänpääsykeskiarvo on 7,5.

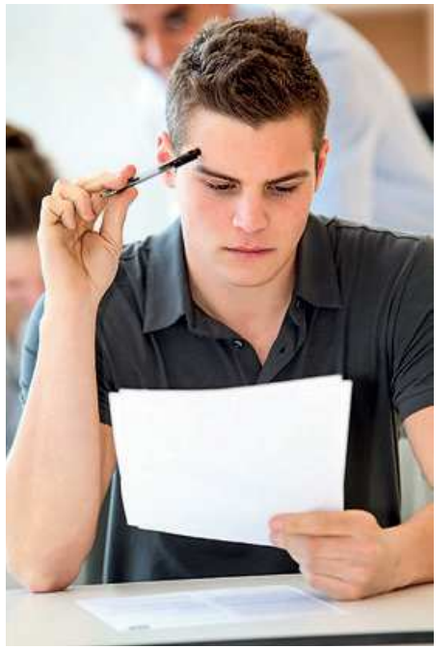
Ratkaisu Lasketaan Niilon arvosanojen painotettu keskiarvo.

Painotettu keskiarvo lasketaan samoin kuin frekvenssijakaumasta laskettava keskiarvo. Frekvensseinä käytetään painokertoimia.

$$\bar{x} = \frac{1{,}5 \cdot 9 + 1{,}5 \cdot 7 + 1{,}5 \cdot 8 + 1{,}5 \cdot 6 + 2{,}0 \cdot 7}{1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 2{,}0}$$

$$= 7{,}56... > 7{,}5$$

Vastaus Niilo pääsee opiskelemaan kyseiseen oppilaitokseen.



Esimerkki 7

Vaateliikkeessä myytävien housujen hinta on 95,00 euroa. Housujen tukkuhinta myyjälle on 48,00 euroa. Jokaista housua kohti on laskettava 4,20 euroa kuljetus- ja varastointikustannuksia. Housuista on lisäksi maksettava arvonlisäveroa 24 % housujen verottomasta hinnasta.

a) Laske housujen arvonlisäveron määrä ja myyjälle jäävä voitto.

b) Esitä sektoridiagrammin avulla housujen myyntihinnan muodostuminen mainituista osista.

Ratkaisu

a) Olkoon housujen veroton hinta x euroa. Kun verottomaan hintaan lisätään 24 % arvonlisävero, saadaan myyntihinta 95,00 euroa.

$$1{,}24x = 95{,}00 \quad |:1{,}24$$

$$x = \frac{95{,}00}{1{,}24}$$

$$x = 76{,}612...$$

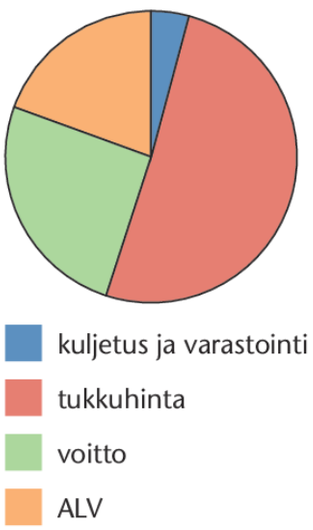
$$x \approx 76{,}61 \ (€)$$

Arvonlisävero on näin ollen $95{,}00 - 76{,}612\ldots = 18{,}387\ldots \approx 18{,}39$ (€)

Kun verottomasta hinnasta vähennetään tukkuhinta sekä varastointi- ja kuljetuskustannukset, saadaan myyjälle jäävä voitto:

$$76{,}612\ldots \text{ €} - 48{,}00 \text{ €} - 4{,}20 \text{ €} \approx 24{,}41 \text{ €}$$

b) Sektoridiagrammin piirtämistä varten on laskettava kunkin osan suhteellinen osuus myyntihinnasta. Tämä määrää sektorin keskuskulman suuruuden.



	Suhteellinen osuus myyntihinnasta	Keskuskulman suuruus
Kuljetus- ja varastointikustannukset	$\frac{4{,}20}{95{,}00} = 0{,}0442...$	$0{,}0442... \cdot 360° \approx 16°$
Tukkuhinta	$\frac{48{,}00}{95{,}00} = 0{,}505...$	$0{,}505... \cdot 360° \approx 182°$
Voitto	$\frac{24{,}41...}{95{,}00} = 0{,}256...$	$0{,}256... \cdot 360° \approx 93°$
Arvonlisävero (ALV)	$\frac{18{,}38...}{95{,}00} = 0{,}193...$	$0{,}193... \cdot 360° \approx 70°$

Vastaus

a) Housujen arvonlisäveron määrä on 18,39 €, ja myyjälle jäävä voitto on 24,41 €.

Esimerkki 8

Erään vuoden aikana tilastoitiin sairaalan synnytysosastolla vauvojen syntymäpainoja. Painojen keskiarvo oli 3,1 kg ja keskihajonta 0,40 kg. Erään antilooppilajin syntymäpainon keskiarvo on 12,0 kg ja keskihajonta 2,4 kg. Eläintarhan antilooppinaaras pyöräytti 15,0 kg painavan jälkeläisen. Kuinka paljon pitäisi sairaalassa syntyvän vauvan painaa, jotta se olisi suhteessa yhtä painava?

Ratkaisu

Jotta lukuja voidaan vertailla, ne on normitettava.
Antiloopin jälkeläisen syntymäpainon normitettu arvo:

$$z_1 = \frac{15{,}0 - 12{,}0}{2{,}4} = 1{,}25$$

Merkitään vauvan syntymäpainoa kirjaimella x. Tämän normitettu arvo on:

$$z_2 = \frac{x - 3{,}1}{0{,}4}$$

Jotta molemmat olisivat suhteessa yhtä painavat, normitettujen arvojen tulee olla yhtä suuret.

Saadaan yhtälö:

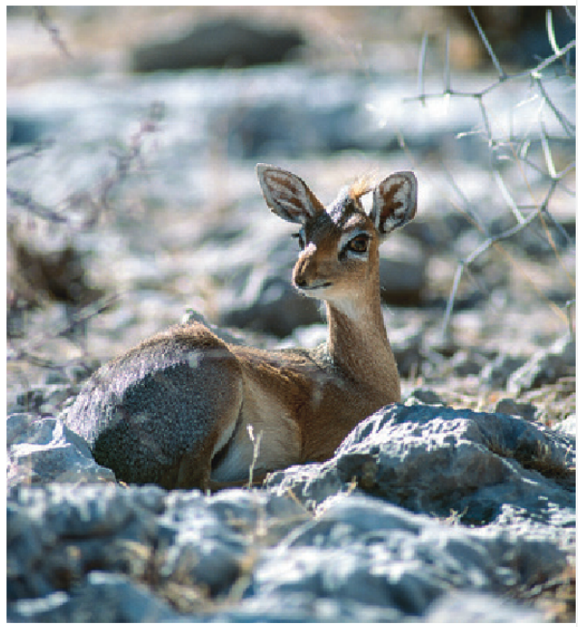
$$\frac{x - 3{,}1}{0{,}4} = 1{,}25 \quad |\cdot 0{,}4$$

$$x - 3{,}1 = 0{,}5$$

$$x = 3{,}6 \ \text{(kg)}$$

Vastaus

Vauvan syntymäpainon tulisi olla 3,6 kg.



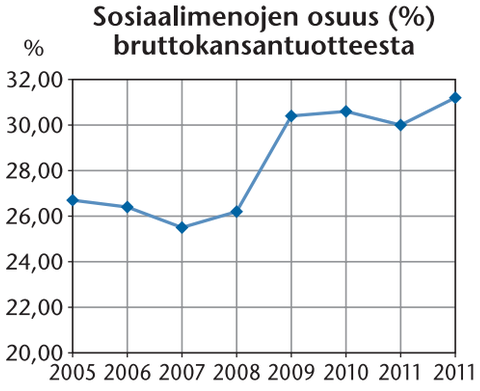
Tehtäviä

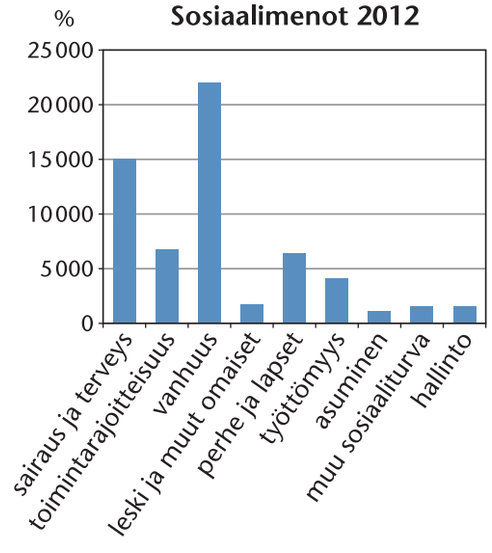
Tehtäviä ilman laskinta

356 Kuvaajissa on esitelty sosiaalimenoja ja niiden osuutta bruttokansantuotteesta (BKT).

a) Milloin sosiaalimenot olivat pienimmät ja milloin suurimmat mainitulla aikavälillä?

b) Mikä oli vuonna 2012 eniten rahaa vaativa alue?





357 Kuvion summafrekvenssikuvaaja esittää ammatissa toimivien lääkärien ikäjakauman vuonna 2001 (Lähde: Terveydenhuollon ammattihenkilöt 31.12.2001, Stakes 5/2002). Arvioi kuvaajan perusteella

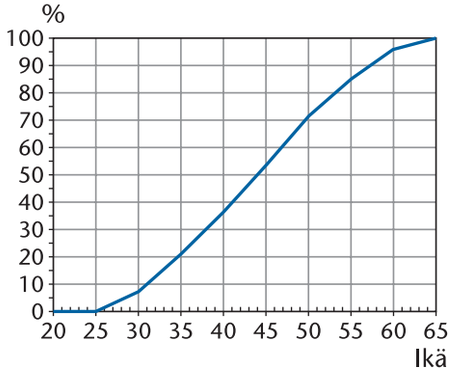
a) lääkäreiden mediaani-ikä

b) ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta alitti

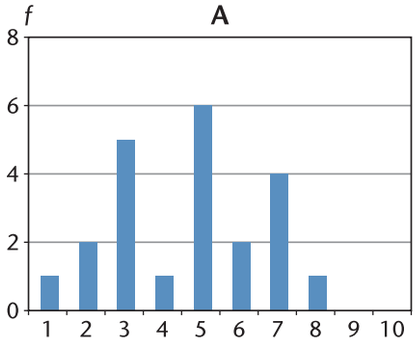
c) ikä, jonka 25 % lääkärikunnasta ylitti

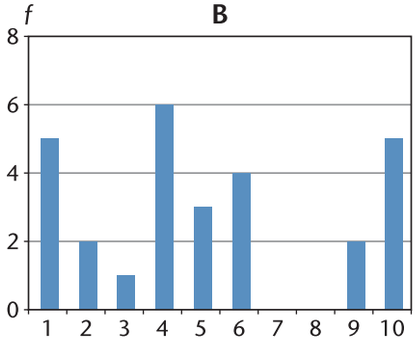
d) kuinka monta prosenttia lääkärikunnasta oli 40 vuotta täyttäneitä

e) kuinka monta prosenttia enemmän oli alle 35-vuotiaita lääkäreitä kuin 55 vuotta täyttäneitä. [S2004, 3]



358 Eri aineistoista määritettyjen muuttujien A ja B keskiarvot ovat likimain samat.





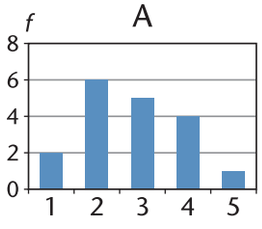
Päättele jakaumien perusteella, kumman muuttujan

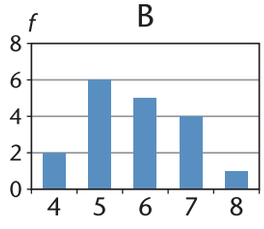
a) moodi

b) keskihajonta on suurempi?

Perustele vastauksesi.

359 Samasta havaintoaineistosta määritettiin muuttujien A ja B jakaumat. Päättele jakaumien perusteella kummalla muuttujalla on suurempi





a) keskiarvo **b)** keskihajonta.

Perustele vastauksesi

360 Määritä lukujen 7, 3, 6, 3, 5, 3, 1 mediaani ja keskiarvo. [K2008, 2b]

361 Lukujen 2, 5, 6 ja *a* keskiarvo on 2. Määritä *a*. [S2009, 2a]

362 Muuttujan *x* frekvenssijakauma on seuraava:

x	*f*
5	8
6	2
7	6
8	5
9	5
10	4

a) Määritä muuttujan *x* moodi ja mediaani.

b) Piirrä frekvenssijakauman kuvaaja.

363 Muuttujan *x* frekvenssijakauma on seuraava:

x	*f*
1,0–1,9	1
2,0–2,9	12
3,0–3,9	9
4,0–4,9	10

a) Määritä moodiluokka ja mediaaniluokka.

b) Piirrä frekvenssijakauman kuvaaja.

364 Määritä taulukosta puuttuvat luvut.

Muuttuja	*f*	*f* %	*sf*	*sf* %
1	8	32 %		
2	5			52 %
3			22	88 %
4	3			

365 Liikuntakeskus teki asiakaskyselyn, jossa selvitettiin asiakkaiden liikuntakeskuksen käyttökertojen määriä viikon aikana. Tulokset on koottu seuraavaan taulukkoon.

Käyttökertojen lukumäärä viikossa x	f	f %	sf	sf %
1	52	6	52	6
2	121	15	173	21
3	345	43	518	64
4	210	26	728	90
5	81	10	809	100

Vastaa jakaumien perusteella seuraaviin kysymyksiin:

a) Mikä on aineiston moodi?

b) Kuinka monta prosenttia asiakkaista kävi liikuntakeskuksessa kaksi kertaa viikossa?

c) Kuinka monta prosenttia asiakkaista käytti liikuntakeskusta korkeintaan kolme kertaa viikossa?

d) Kuinka moni asiakas käytti liikuntakeskuksen palveluja vähintään neljä kertaa viikossa?

e) Kuinka moni asiakas käytti viikoittain liikuntakeskuksen palveluita 2–3 kertaa?

f) Kuinka monta prosenttia asiakkaista kävi liikuntakeskuksessa ainakin kolme kertaa viikossa?

Tehtäviä laskimen kanssa

366 Kaisa laski viikon Rooman matkallaan joka päivä näkemiensä turistibussien lukumäärän. Määrät olivat seuraavat:

Viikonpäivä	Turistibussien lukumäärä
maanantai	16
tiistai	25
keskiviikko	42
torstai	18
perjantai	22
lauantai	36
sunnuntai	19

Kuinka monta turistibussia Kaisa näki keskimäärin päivän aikana?

367 Opettaja tilastoi koeviikolla matematiikan oppilaiden matematiikan kokeeseen käyttämiä koeaikoja.

Koeaika (min)	Frekvenssi f
0–45	0
46–90	5
91–135	4
136–180	10
181–225	12
226–270	2

Muodosta kaikki frekvenssijakaumat ja vastaa niiden avulla seuraaviin kysymyksiin.

a) Kuinka monta oppilasta kokeeseen osallistui?

b) Kuinka monta prosenttia oppilaista käytti kokeeseen aikaa korkeintaan 180 min?

c) Kuinka moni oppilas teki koetta yli 180 min?

d) Kuinka monta prosenttia oppilaista oli kokeessa yli 90 min mutta korkeintaan 180 min?

e) Mikä on koeajan mediaaniluokka?

368 Riista- ja kalatalouden tutkimuslaitos antaa aina helmikuussa arvion Suomen susikannan koosta. Taulukkoon on koottu arvioita vuosilta 2008–2013.

Vuosi	Susien lukumäärä
2008	210
2009	220
2010	150
2011	135
2012	150
2013	130

a) Kuinka suuri on keskimääräinen susikanta vuosina 2008–2013?

b) Laske susien lukumäärän keskihajonta.

c) Kuinka suuri tulisi susikannan vähintään olla, jotta sen koko poikkeaisi merkitsevästi keskiarvosta?

369 Ongelmanratkaisukurssilla erään ongelman ratkaisemiseen kuluneet ajat on koottu seuraavaan taulukkoon.

Aika (s)	*f*
0–9	4
10–19	3
20–29	5
30–39	8
40–49	1
50–59	2

a) Piirrä frekvenssijakaumasta histogrammi.

b) Laske keskiarvo, moodi ja mediaani.

370 Tiia sai matematiikan pakollisista kursseista arvosanoiksi 6, 7, 6, 8, 7, 6.

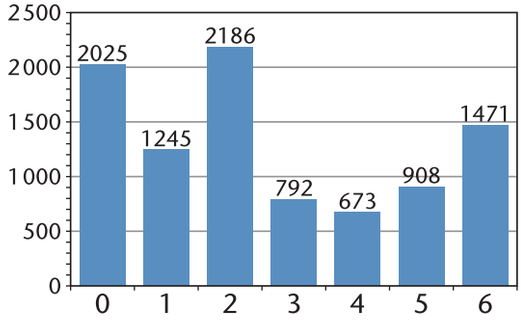
a) Laske arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta.

b) Mikä arvosana Tiian on tämän perusteella vähintään saatava kertauskurssista, jotta hänen arvosanojensa keskiarvo olisi vähintään 7?

c) Onko Tiian mahdollista saada kurssiarvosanojen perusteella lopulliseksi arvosanaksi päättötodistukseen numero 8?

d) Jos Tiia saa kertauskurssista arvosanan 10, niin poikkeaako tämä merkitsevästi pakollisten kurssien arvosanoista?

371 Alla oleva pylväsdiagrammi esittää kevään 2007 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen tehtävän 8 pistejakaumaa (vaaka-akselilla pisteet, pylväiden korkeus osoittaa kyseisen pistemäärän saaneiden lukumäärän). Laadi vastaava sektoridiagrammi, josta ilmenee kunkin pistemäärän saaneiden suhteellinen osuus, ja ilmoita osuudet prosentteina.



[K2009, 4]

372 Niina ja Sampsa tutkivat oman koulunsa opiskelijoita tilastotieteen kurssilla tehtävässä projektityössä. Koulun tyttöjen pituuden keskiarvoksi tutkimuksessa saatiin 168,5 cm keskihajonnan ollessa 6,4 cm. Poikien pituuden keskiarvo tutkimuksen perusteella oli 174,8 cm ja keskihajonta 9,8 cm.

a) Niinan pituus oli 172,0 cm ja Sampsan 180,0 cm. Kumpi oli pidempi suhteessa koulun muihin samaa sukupuolta oleviin opiskelijoihin?

b) Kuinka pitkä Nellin tulisi olla, jotta hän olisi suhteessa yhtä pitkä tyttöjen joukossa kuin mitä 190,0 cm mittainen poika on omassa joukossaan?

373 Lääkärintarkastukseen osallistui päivän aikana 15 opiskelijaa. Päivän aikana tarkastuksessa käyneiden opiskelijoiden keskipituus oli 178,3 cm. Santeri oli osallistunut lääkärintarkastukseen. Laske Santerin pituus kun muiden lääkärintarkastuksessa olleiden keskipituus oli 177,8 cm.

374 Eräällä matematiikan kurssilla oppilaat saivat vain arvosanoja 10, 9 ja 8. Niitä esiintyi suhteessa 1:2:3. Laske kurssin arvosanojen keskiarvo yhden desimaalin tarkkuudella. [S2013, 11]

375 Eräässä kokeessa annettiin suoritusten arvosanoiksi 0, 1, 2, 3, 4, 5 tai 6. Näiden prosenttiosuudet olivat seuraavat:

Arvosana	0	1	2	3	4	5	6
Osuus	5,80	10,99	17,54	24,78	19,95	15,48	5,46

Laske kokeen keskiarvo ja keskihajonta. [K2011, 7]

13 Todennäköisyyslaskenta

Klassinen todennäköisyys

- **Klassisessa todennäköisyydessä** tutkitaan symmetristen tapahtumien todennäköisyyksiä.
- Tapahtuma on **symmetrinen**, jos kaikki alkeistapaukset ovat yhtä mahdollisia.
- Tapahtuman A klassinen todennäköisyys $P(A)$ lasketaan jakamalla suotuisien tapausten lukumäärä kaikkien alkeistapausten lukumäärällä.

$$P(A) = \frac{\text{suotuisien tapausten lukumäärä}}{\text{alkeistapausten lukumäärä}}$$

- Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys on 0 ja varman tapahtuman todennäköisyys on 1.

$$0 \le P(A) \le 1$$

- **Geometrisessa todennäköisyydessä** tapahtumia voidaan mallintaa esimerkiksi geometrian avulla (pituus, pinta-ala, tilavuus).

Tuloperiaate ja kombinaatiot

- Jos tapahtuma koostuu k:sta kappaleesta vaiheita siten, että ensimmäisellä vaiheella on n_1 eri tulosvaihtoehtoa, toisella vaiheella n_2 tulosvaihtoehtoa, ja niin edelleen niin että viimeisellä vaiheella on n_k tulosvaihtoehtoa, niin koko tapahtumalla on **tuloperiaatteen** mukaan $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ tulosvaihtoehtoa.
- n kappaletta alkioita voidaan tuloperiaatteen mukaan järjestää jonoon $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ erilaisella tavalla. Tätä tuloa kutsutaan **kertomaksi**.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

- Jos perusjoukossa on n alkiota, siitä voidaan muodostaa osajoukkoja, joissa kussakin on k alkiota. Osajoukkojen eli **kombinaatioiden** lukumäärä on

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Todennäköisyyden laskusääntöjä

- Tapahtuman A vastatapahtuma eli **komplementti** on $\overline{A}$. Tapahtuman ja sen komplementin todennäköisyyksien summa on 1.

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad P(\overline{A})=1-P(A)$$

- Jos tapahtuma muodostuu kahdesta tai useammasta peräkkäisestä, **riippumattomasta**, tapahtumasta, kokonaistodennäköisyys on peräkkäisten tapahtumien todennäköisyyksien tulo (**kertolaskusääntö**).

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Jos tapahtumat A ja B eivät ole toisistaan riippumattomia, edellinen tapahtuma vaikuttaa seuraavan tapahtuman todennäköisyyteen.

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

- Jos tapahtuma muodostuu kahdesta tai useammasta, toisensa poissulkevasta eli **erillisestä** tapahtumasta, kokonaistodennäköisyys on näiden vaihtoehtoisten tapahtumien todennäköisyyksien summa (**yhteenlaskusääntö**)

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$$

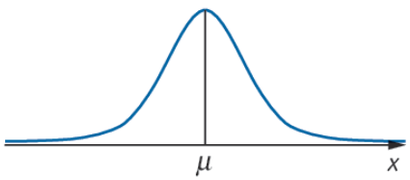
- Jos tapahtumat eivät ole erillisiä eli $P(A) \cdot P(B) \neq 0$,

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

Normaalijakauma

- Kun muuttujan x jakauma on Gaussin käyrän muotoinen, muuttuja noudattaa **normaalijakaumaa**. Jakauman keskiarvo (odotusarvo) on μ ja keskihajonta σ.

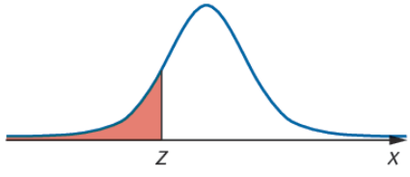
$$x \sim N(\mu,\sigma)$$



- **Normitettu normaalijakauma** on jakauma, jonka odotusarvo on 0 ja keskihajonta 1.

- Gaussin käyrän alle jäävän pinta-alan tarkat arvot saadaan **kertymäfunktion** Φ avulla. Pinta-ala kertoo todennäköisyyden $P(x \leq z)$.

$$\Phi(z) = P(x \leq z)$$



Esimerkki 1

Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä

a) ainakin toinen silmäluvuista on parillinen

b) silmälukujen summa on korkeintaan kuusi?

Ratkaisu

a) Esitetään mahdolliset heittotulokset taulukossa. Merkitään taulukkoon kaikki ne ruudut, joissa ainakin toinen silmäluvuista on parillinen.

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suotuisia tapauksia on $3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 27$.
Alkeistapauksia eli erilaisia heittotuloksia on 36.

Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{27^{(9}}{36} = \frac{3}{4}$.

b) Lasketaan taulukkoon heittotuloksia vastaavat silmälukujen summat. Merkitään taulukkoon ne ruudut, joissa silmälukujen summa on korkeintaan kuusi.

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Suotuisia tapauksia on $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{15^{(3}}{36} = \frac{5}{12}$.

Vastaus

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5}{12}$

Esimerkki 2

Atte harrastaa pituushyppyä. Kilpailutilanteessa hän astuu hyppynsä yli todennäköisyydellä 10 %. Jos hänen hyppynsä epäonnistuu, seuraava hyppy astutaan yli 20 %:n todennäköisyydellä. Atte hyppää kolme kertaa. Millä todennäköisyydellä hänen kolmas hyppynsä onnistuu, jos hän astuu yli ensimmäisen hyppynsä?

Ratkaisu

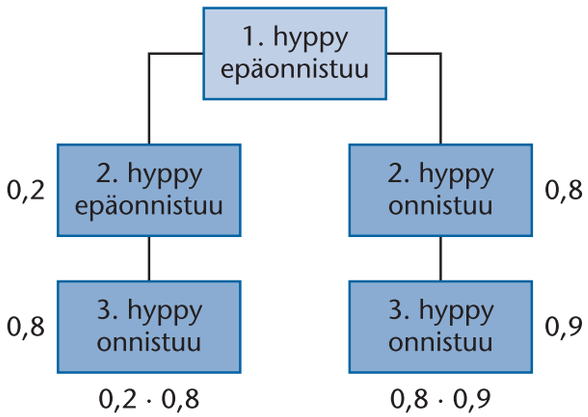
Jos hyppy onnistuu, seuraava hyppy

- onnistuu todennäköisyydellä 90 % = 0,9
- epäonnistuu todennäköisyydellä 10 % = 0,1.

Jos hyppy epäonnistuu, seuraava hyppy

- onnistuu todennäköisyydellä 80 % = 0,8
- epäonnistuu todennäköisyydellä 20 % = 0,2.

Laaditaan tehtävän tilanteesta puukaavio. Tilanteeseen sopivia kolmen hypyn sarjoja on kaksi erilaista:



Yksi puun haara muodostuu peräkkäisistä tapahtumista, joiden todennäköisyydet kerrotaan keskenään. Kysytty todennäköisyys saadaan laskemalla haarojen tulot yhteen.

$$\begin{aligned} P(\text{”kolmas hyppy onnistuu”}) &= 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}9 \\ &= 0{,}16 + 0{,}72 \\ &= 0{,}88 \end{aligned}$$

Vastaus 0,88

Esimerkki 3

Sääennusteen mukaan lumisateen todennäköisyys päivän aikana on 0,40. Lumisateen todennäköisyys on sama seuraavina kuutena päivänä. Millä todennäköisyydellä seuraavan kuuden päivän jaksolla

a) sataa lunta jokaisena päivänä

b) sataa lunta kahtena ensimmäisenä päivänä, mutta ei viimeisen neljän päivän aikana

c) sataa lunta ainakin yhtenä päivänä?

Ratkaisu

a) Peräkkäisten tapahtumien todennäköisyydet kerrotaan aina keskenään eli käytetään kertolaskusääntöä.

$$P(\text{”sataa joka päivä”}) = 0{,}4^6 \approx 0{,}0041$$

b) Koska lumisateen todennäköisyys on 0,4, poutasään todennäköisyys on sen komplementti eli $1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Myös tässä sovelletaan kertolaskusääntöä, koska todennäköisyys muodostuu kuudesta peräkkäisestä tapahtumasta.

$$\underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}4}_{\text{sataa}} \cdot \underbrace{0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6}_{\text{ei sada}}$$

$$P(\text{”sataa vain kahtena ensimmäisenä päivänä”}) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^4 \approx 0{,}021$$

c) Tehtävä on helpompi ratkaista komplementin avulla. Tapahtuman ”sataa ainakin yhtenä päivänä” vastatapahtuma on ”ei sada yhtenäkään päivänä”.

Kaikki kuusi päivää ovat poutapäiviä todennäköisyydellä $0{,}6^6$.

$$P(\text{”sataa ainakin yhtenä päivänä”}) = 1 - 0{,}6^6 \approx 0{,}95$$

Vastaus **a)** 0,0041 **b)** 0,021 **c)** 0,95

Esimerkki 4

Laatikko sisältää kuusi sanapelin kirjainlaattaa. Näistä kolme on A-kirjaimia ja muut laatat ovat K, T ja O. Viimeinen pelaaja nostaa kaikki laatat. Millä todennäköisyydellä

a) kolme viimeistä laattaa ovat A-kirjaimia

b) A-kirjaimet nostetaan peräkkäin?

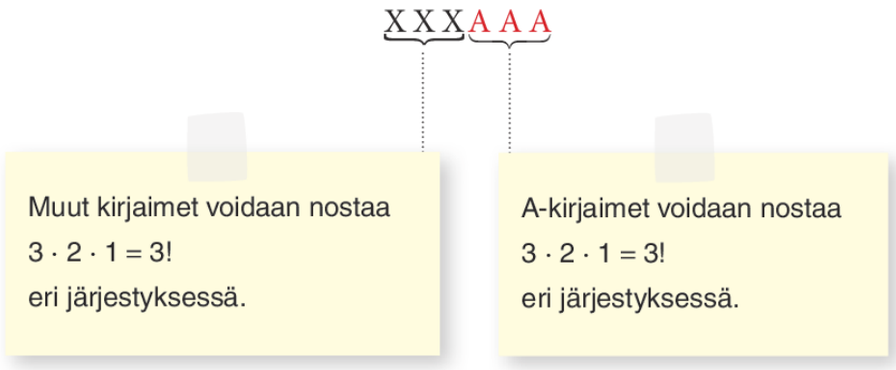
Ratkaisu

a) Koska laattoja on 6, ne voidaan tuloperiaatteen mukaan nostaa

$$6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 6!$$

erilaisessa järjestyksessä. Nämä järjestykset muodostavat alkeistapausten joukon.

Merkitään muita kuin A-kirjaimia kirjaimella X. Suotuisa jono on siis



Järjestyksiä, joissa A-kirjaimet ovat viimeisiä, on $3! \cdot 3!$

Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{3! \cdot 3!}{6!} = \frac{36}{720} = 0{,}05$.

b) A-kirjaimet ovat peräkkäin seuraavissa tilanteissa:

AAAXXX XAAAXXX XXAAAX XXXAAA

Jokainen näistä yhdistelmistä voidaan nostaa $3! \cdot 3!$ eri tavalla.

Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{4 \cdot 3! \cdot 3!}{6!} = \frac{144}{720} = 0{,}2$.

Vastaus **a)** 0,05 **b)** 0,2

Esimerkki 5

Ranskan kansallisessa lotossa arvotaan kuusi numeroa 49 numeron joukosta. Henkilö täyttää yhden ruudukon. Millä todennäköisyydellä

a) ruudukossa ei ole yhtään osumaa

b) ruudukossa on 4 oikeaa numeroa

c) hän voittaa päävoiton eli saa 6 oikein?

Ratkaisu

a) Lotossa erilaisia mahdollisia rivejä on $\binom{49}{6}$ kappaletta.

Jos henkilöllä ei ole yhtään osumaa, kaikki numerot on valittu väärien numeroiden joukosta. Vääriä numeroita on $49 - 6 = 43$ kappaletta, joten erilaisia väärien numeroiden rivejä on

$\binom{43}{6} = 6\,096\,454$ kappaletta.

Kombinaatio saadaan monilla laskimilla nCr-toiminnolla.

$$P(\text{”ei yhtään osumaa”}) = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = 0{,}4359\ldots \approx 0{,}44$$

b) Jos henkilöllä on neljä oikeaa numeroa, ne on valittu kuuden oikean numeron joukosta. Loput kaksi on valittu 43 väärän numeron joukosta.

$$P(\text{”4 oikein, 2 väärin”}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0{,}000968\ldots \approx 0{,}00097$$

c) Päävoittorivejä eli kaikki numerot oikein on vain yksi.

$$P(\text{”6 oikein”}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 7{,}1511\ldots \cdot 10^{-8} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-8}$$

Vastaus **a)** 0,44 **b)** 0,00097 **c)** $7{,}2 \cdot 10^{-8}$

Esimerkki 6

Kaupallinen TV-kanava halusi selvittää Big Brother -sarjan katsojien ikäjakaumaa mainostoimistoja varten. Katsojien keskuudessa toteutettiin kysely, jossa tiedusteltiin katsojan ikää. Tulokset koottiin ja todettiin, että ikä noudatti normaalijakaumaa $N(28, 3)$ eli katsojien keski-ikä oli 28 vuotta keskihajonnan ollessa 3 vuotta. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu katsoja on iältään 26–36 vuotta?

Ratkaisu Normitetaan iät 26 vuotta ja 36 vuotta.

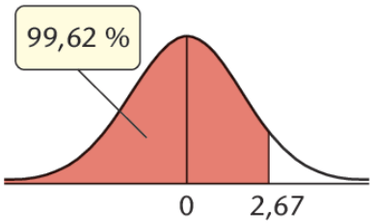
$$z_{26} = \frac{26-28}{3} = -0{,}666... \approx -0{,}67 \quad \text{ja}$$

$$z_{36} = \frac{36-28}{3} = 2{,}666... \approx 2{,}67$$

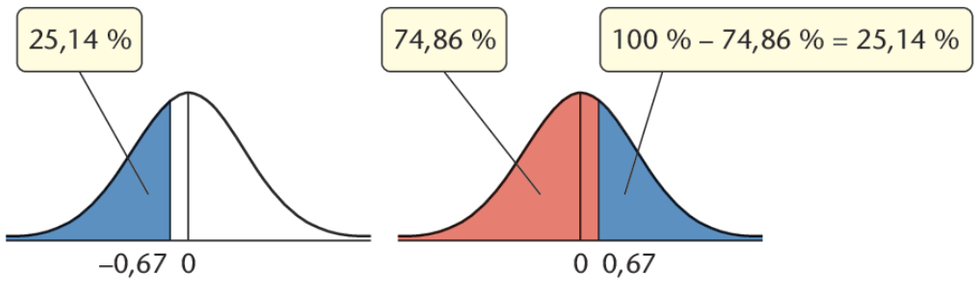
Symbolisen laskimen jakaumatoiminnoilla kysytty todennäköisyys saadaan laskettua myös ilman normitusta. Selvitä oman laskimesi jakaumatoiminnot.

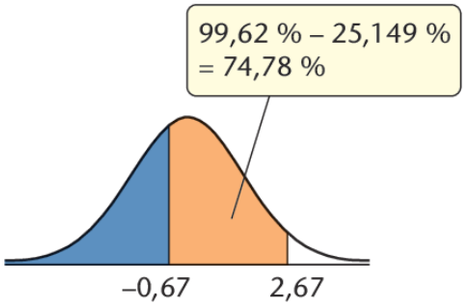
Selvitetään normitettuja arvoja vastaavat kertymäfunktion arvot joko taulukosta tai laskimella.

$$\Phi(2{,}67) = 0{,}9962 = 99{,}62\,\%$$



$$\begin{aligned}\Phi(-0{,}67) &= 1-\Phi(0{,}67)\\ &= 1-0{,}7486\\ &= 0{,}2514\\ &= 25{,}14\,\%\end{aligned}$$





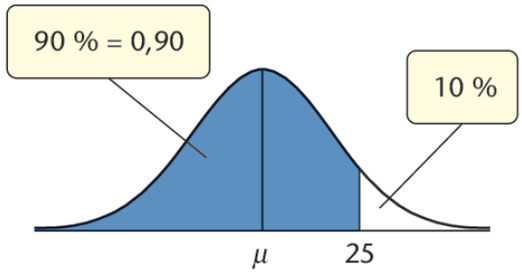
$$\begin{aligned}P(\text{"ikä välillä 26–36 vuotta"}) &= 99{,}62\,\% - 25{,}14\,\%\\ &= 74{,}78\,\%\\ &\approx 0{,}75\end{aligned}$$

Vastaus Todennäköisyys on 0,75.

Esimerkki 7

Televisiossa pyöri iltapäiväisin visailu, johon rekisteröidyttiin matkapuhelimella. Kysymykset olivat monivalintatehtäviä, joiden vastaukset lähetettiin tekstiviestillä. Eräänä päivänä osallistujien saamat pistemäärät noudattivat normaalijakaumaa keskihajonnan ollessa 7 pistettä. Visailijoista 10 % sai yli 25 pistettä. Mikä oli keskimääräinen pistesaalis?

Ratkaisu Koska 10 % visailijoista sai yli 25 pistettä, niin 90 % sai alle tämän pistemäärän.



Määritetään pistemäärän 25 normitettu arvo.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{25-\mu}{7}$$

Selvitetään joko taulukon tai laskimen avulla, mikä normitetun normaalijakauman arvo z vastaa kertymäfunktion arvoa 0,90.

$$\Phi(z) = 0{,}90$$
$$z = 1{,}2816$$

Normitetut arvot ovat yhtä suuret, joten saadaan yhtälö

$$\frac{25-\mu}{7} = 1{,}2816$$

$$\frac{25-\mu}{7} = 1{,}2816 \quad |\cdot 7$$
$$25-\mu = 8{,}9712$$
$$-\mu = -16{,}0288 \quad |\cdot(-1)$$
$$\mu = 16{,}0288 \approx 16$$

Vastaus Keskimääräinen pistesaalis oli 16 pistettä.

Tehtäviä

Tehtäviä ilman laskinta

376 Noppaa heitetään kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä
a) molemmilla heitoilla saadaan parillinen luku
b) saadaan ainakin kerran kuutonen?

377 Lautapelissä käytetään tetraedrin muotoista noppaa, jonka silmäluvut ovat 100, 300, 500 ja 700. Pelaaja saa itselleen kierrospalkkion heittämällä noppaa kaksi kertaa. Palkkio on silmälukujen yhteenlaskettu summa. Millä todennäköisyydellä kierrospalkkio on
a) vähintään 600
b) enintään 800?

378 Noppaa heitetään kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä
a) silmälukujen summa on vähintään kahdeksan
b) silmälukujen summa on suurempi kuin niiden tulo? [K2013, 10]

379 Petteri ja Jarkko ovat Inter Raililla Euroopassa. He ostavat paikkaliput junaan. Lipunmyynnissä on kaksi virkailijaa. Molemmat ovat keskimäärin 35 min tunnista varattuina ja lopun ajan vapaina. Virkailijoiden on todettu olevan 20 min tunnista yhtä aikaa varattuina. Millä todennäköisyydellä Petteri ei joudu odottamaan pääsyä lippuluukulle?

380 Tikanheittäjä osuu napakymppiin todennäköisyydellä 0,5. Jos hän ei osu napakymppiin, seuraavalla heitolla onnistumisen mahdollisuus on enää 0,2. Millä todennäköisyydellä tikanheittäjä osuu kolmannella heitolla napakymppiin, jos hän epäonnistuu ensimmäisellä heitollaan?

381 Kolikkoa heitetään neljä kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan
a) kaikilla heitoilla kruuna
b) tasan kolmella heitolla kruuna?

382 Huijari käyttää uhkapelissä väärennettyä noppaa. Noppaa on painotettu siten, että silmälukujen 5 ja 6 todennäköisyydet ovat kaksinkertaiset muiden silmälukujen todennäköisyyksiin verrattuna. Huijari heittää kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä hän saa molemmilla kerroilla kuutosen?

383 Pelipöydällä on neljä korttia kuvapuoli alaspäin. Korteista kaksi on patoja ja kaksi muuta ovat ruutu ja risti. Pelaaja kääntää kaksi korttia. Millä todennäköisyydellä
a) molemmat ovat patoja
b) ainakin toinen on pata?

384 Eeva Edustaja valitaan kunnanvaltuustoon todennäköisyydellä 0,4. Jos hän ei pääse valtuustoon, seuraavalla kaudella valinnan todennäköisyys on vain 0,2. Millä todennäköisyydellä Eeva valitaan valtuustoon vuonna 2020, kun hänet valittiin valtuustoon vuona 2012? Vaalit järjestetään neljän vuoden välein.

Tehtäviä laskimen kanssa

385 Ruuhkabussi on aamulla myöhässä todennäköisyydellä 0,15. Millä todennäköisyydellä kouluviikon aikana opiskelija myöhästyy koulusta bussin takia
a) joka päivä
b) ei kertaakaan
c) ainakin kerran?

386 Pitkän ranskan ylioppilaskirjoituksiin osallistuu 7 opiskelijaa, joista neljä on tyttöjä. Heidät laitetaan istumaan saliin peräkkäin. Paikat arvotaan. Millä todennäköisyydellä
a) pojat istuvat jonon alussa
b) tytöt istuvat jonossa peräkkäin?

387 Englantilaisen jouluvanukkaan sisään on tapana piilottaa pieniä symbolisia esineitä. Kokki leipoo suoran ympyrälieriön muotoisen vanukkaan sisään sormuksen. Ruokailija leikkaa vanukkaasta sektorin muotoisen palasen, jonka pohjan ala on 2,5 cm^2 ja korkeus 8,0 cm. Millä todennäköisyydellä hän saa sormuksen, kun vanukkaan tilavuus on 1,4 litraa?

388 Tietokone-ohjelmaa valitsee satunnaisesti suorakulmiolle kannan ja korkeuden ja laskee suorakulmion alan. Molemmat sivun pituudet valitaan väliltä 10–40 (cm). Millä todennäköisyydellä
a) molemmat sivut ovat korkeintaan 15 cm pituisia
b) kanta on alle 20 cm ja korkeus yli 20 cm?

389 Abiturientilla on kaksi herätyskelloa. Uudempi toimii oikein 98 %:n todennäköisyydellä ja vanhempi 85 %:n todennäköisyydellä. Matematiikan kokeen aattona abiturientti asettaa molemmat kellot soimaan seuraavana aamuna. Millä todennäköisyydellä kelloista soi oikeaan aikaan
a) molemmat
b) vain toinen
c) ei kumpikaan? [S2006, 4]

390 Mandariinilaatikko sisältää 30 hedelmää. Vaikka lajike on siemenetön, seitsemän mandariinin sisällä on siemen. Olli nostaa laatikosta kuusi mandariinia. Millä todennäköisyydellä
a) yhdessäkään hedelmässä ei ole siementä
b) kolmessa hedelmässä on siemen?

391 Korttipakasta, joka sisältää 52 korttia, nostetaan kahdeksan korttia palauttamatta niitä pakkaan. Millä todennäköisyydellä saadaan
a) kuusi ruutua
b) kolme pataa ja kolme ristiä?

392 Jonkin asteisesta värinäkökyvyn puutteesta kärsii miehistä noin 10 prosenttia. Millä todennäköisyydellä kahdeksan satunnaisesti valitun miehen joukossa
a) ei ole yhtään henkilöä, jolla tämä ongelma esiintyisi
b) on ainakin yksi henkilö, jonka värinäkökyky on puutteellinen?

393 Verkkopankkiin kirjaudutaan niin, että ensin annetaan kuuden numeron pituinen käyttäjätunnus ja neljän numeron pituinen salasana, minkä jälkeen annetaan vielä neljän numeron pituinen kertakäyttötunnus. Jokaisella pankin asiakkaalla on eri käyttäjätunnus, mutta usealla asiakkaalla voi olla sama salasana ja kertakäyttötunnus.

a) Jos verkkopankilla on 600 000 asiakasta, niin mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä arvauksella löytää jonkun asiakkaan käyttäjätunnuksen?

b) Mikä on todennäköisyys sille, että yhdellä yrityksellä pääsee kirjautumaan verkkopankkiin? [S2010, 8]

394 Tiedonsiirtojärjestelmässä havaittiin yksittäisen bitin saapuvan virheellisenä vastaanottajalle todennäköisyydellä 0,00015. Yksittäisten bittien siirtojen oletetaan olevan toisistaan riippumattomia.

a) Millä todennäköisyydellä vastaanottajalle saapuvassa 16 bitin jonossa on ainakin yksi virheellinen bitti?

b) Jos lähetetään 32 kappaletta 16 bitin jonoja, niin millä todennäköisyydellä vastaanottajalle saapuu ainakin yksi virheellinen jono? [K2010, 8]

395 Veetun lounaspaikassa on kolmenlaisia pitsoja: 7,50 euron peruspitsa, 8,50 euron ruispitsa ja 10,50 euron pannupitsa. Pitsoihin valitaan 15 täytteestä kaksi erilaista. Maksamalla euron lisää voi valita vielä kolmannen täytteen. Veetu yrittää syödä aina erilaisen pitsan, joka eroaa kaikista aikaisemmista joko pohjaltaan tai täytteiltään.

a) Kuinka monta viikkoa hän voi tehdä näin, jos hän syö ravintolassa viisi kertaa viikossa?

b) Mikä on erilaisten pitsojen keskimääräinen hinta [S2012, 8]

396 Värisävy esimerkiksi www-sivulla voidaan ilmoittaa kuusimerkkisellä RGB-koodilla, joka sisältää tiedon sävyn muodostavien perusvärien punainen (Red), vihreä (Green) ja sininen (Blue) määristä. Kunkin perusvärin määrä ilmoitetaan kahdella peräkkäin kirjoitetulla merkillä, jotka valitaan joukosta 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f. Laske, kuinka monta erilaista värisävyä RGB-koodilla voidaan ilmaista.

[S2011, 9]

397 Pussissa on punaisia ja valkoisia palloja. Todennäköisyys sille, että väriä näkemättä valitsee punaisen pallon, on 0,4. Kuinka monta punaista palloa pussissa on, jos siinä on n kappaletta valkoisia palloja? [S2013, 8]

398 Vasenkätisiä on erään tiedon mukaan 10 % väestöstä. Kuinka monta henkilöä tulee satunnaisesti kootussa ryhmässä olla, jotta siinä olisi ainakin yksi vasenkätinen todennäköisyydellä 0,8? [K2009, 11]

399 Tarkastellaan vahingollista tapahtumaa, jonka tilastollinen todennäköisyys on $0 < p \leq 1$. Sen turvallisuusluku T määritellään kaavalla $T = -\lg p$.

a) Alkoholinkäytöstä johtuvan kuoleman turvallisuusluku on 3,8 ja tapaturmaisen kuoleman turvallisuusluku 3,4. Kumman kuolinsyyn todennäköisyys on suurempi?

b) Tieliikenteessä loukkaantumisen turvallisuusluku on 3,2. Kuinka monta suomalaista keskimäärin loukkaantuu vuosittain tieliikenteessä? Suomen väkiluku on noin 5,4 miljoonaa. Anna vastaus 100 henkilön tarkkuudella. [K2014, 12]

400 Puutarhuri istuttaa siemeniä, joiden itävyys on 60 %.

a) Mikä on todennäköisyys, että kolmesta istutetusta siemenestä mikään ei idä? Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi siemen itää?

b) Siemeniä istutetaan viiteen ruukkuun kuhunkin kolme. Mikä on todennäköisyys, että jokaisessa ruukussa ainakin yksi siemen itää? [S2008, 11]

401 Golfsimulaattorissa pallon puttaaminen reikään onnistuu varmasti, jos pallo on enintään 80 cm:n päässä reiästä. Tästä alkaen todennäköisyys saada pallo reikään on kääntäen verrannollinen pallon ja reiän välisen etäisyyden neliöön. Millä todennäköisyydellä kymmenestä pallosta ainakin yksi menee reikään putattaessa kolmen metrin etäisyydeltä? [S2007, 11]

402 Kulhossa on viisi punaista ja kymmenen mustaa palloa. Kulhosta poimitaan umpimähkään viisi palloa palauttamatta yhtäkään. Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi poimituista palloista on punainen? Millä todennäköisyydellä kaikki viisi ovat samanvärisiä? [K2008, 8]

403 Sarjakuvanäyttelyn lipun hinta on 5 €, mutta lipunmyyjä on unohtanut ottaa mukaan vaihtorahaa. Lippujonossa on neljä asiakasta, joista kullakin on vain yksi seteli. Kahdella on 5 €:n seteli ja kahdella muulla 10 €:n seteli. Kuinka suurella todennäköisyydellä asiakkaat ovat sellaisessa järjestyksessä, että lipunmyyjä voi antaa heti jokaiselle oikean vaihtorahan? [K2014, 9]

404 Pizzayrittäjä lupaa pizzan ilmaiseksi, jos pizza ei valmistu 50 minuutissa. Keskimääräinen valmistusaika on 20 minuuttia ja keskihajonta 18 minuuttia. Millä todennäköisyydellä asiakas saa pizzansa ilmaiseksi, kun valmistusaika noudattaa normaalijakaumaa?

405 Koulussa tutkittiin opiskelijoiden vanhemmilta saadun viikkorahan määrää. Rahamäärä x oli likimain normaalisti jakautunut ja $x \sim N(38, 8)$. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija saa viikkorahaa 30–40 euroa viikossa?

406 Pääsiäismunien paino noudattaa normaalijakaumaa siten, että munan keskipaino on 60,0 g. Todennäköisyys sille, että satunnaisesti valittu muna painaa yli 65,0 g, on 5,0 %. Laske munien keskihajonta.

407 Valmistajan tarkistusmittauksissa todettiin, että hajuvesipullon sisällön määrä noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 52 millilitraa ja keskihajonta on 1,25 millilitraa. Millä todennäköisyydellä hajuvesipullon sisältö on alle 50 millilitraa? [K2013, 12]

408 Ilpo ja Antero säätivät vuorotellen alumiiniprofiilin leikkurin terää 2 000 mm:n kohdalle. Hyväksyttävä profiilin pituus on 2 000 mm ± 0,40 mm. Säädetyn terän leikkauskohdan oletetaan noudattavan normaalijakaumaa keskiarvona 2 000 mm. Ilpon säädön keskihajonta on 0,19 mm ja Anteron 0,24 mm. Kun jokaisella säädöllä leikataan yhtä monta profiilia, niin kuinka monta prosenttia enemmän hukkakappaleita leikkuri keskimäärin tuottaa Anteron säätämänä kuin Ilpon säätämänä? [K2006, 15]

409 Erään väestötilaston mukaan 18-vuotiaiden tyttöjen pituuden keskiarvo on 165 cm ja keskihajonta 6 cm. Samanikäisten tyttöjen pituus noudattaa likimain normaalijakaumaa. Mikä on todennäköisyys sille, että umpimähkään valittu 18-vuotias tyttö on korkeintaan 175 cm pitkä? Millä todennäköisyydellä kolmen tytön ryhmässä kaikki ovat alle 175 cm pitkiä? Entä millä todennäköisyydellä kolmesta tytöstä ainakin yksi on yli 175 cm pitkä? [S2009, 9]

III Monivalinta-tehtäviä ja harjoituskokeita

Monivalintatehtäviä

Ratkaise kaikki monivalintatehtävät **ilman laskinta**. Vaihtoehdoista a, b ja c vain yksi on oikein.

1 Luvun $1\frac{2}{7}$ käänteisluku on

a) $-1\frac{2}{7}$ **b)** $\frac{7}{2}$ **c)** $\frac{7}{9}$

2 Polynomi $(2-3x)^2$ voidaan sieventää muotoon

a) $3x^2 - 12x + 4$

b) $9x^2 - 12x + 4$

c) $9x^2 + 12x + 4$

3 Lauseke $(-2x^5)^3$ voidaan sieventää muotoon

a) $-8x^{15}$

b) $8x^8$

c) $-8x^8$

4 Paraabelilla $y = 2x - 3x^2$

a) ei ole nollakohtia

b) on yksi nollakohta

c) on kaksi nollakohtaa

5 Suoran $6x - 2y - 12 = 0$ kulmakerroin on

a) 3

b) -6

c) 6

6 Suora $y + 3x + 3 = 0$ leikkaa y-akselin pisteessä

a) $(0, 3)$

b) $(0, -3)$

c) $(3, 3)$

7 Minkä funktion f nollakohta on $x = 3$?

a) $f(x) = x^2 - x$

b) $f(x) = (x-4)^2 - 1$

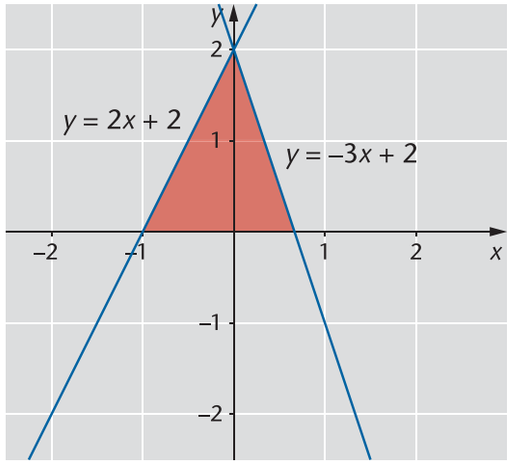
c) $f(x) = (2x-1)^2 - 5x$

8 Kuvan tasoalueen määräävistä epäyhtälöistä eräs on

a) $y \geq 2x + 2$

b) $y \geq -3x + 2$

c) $y \leq 2x + 2$

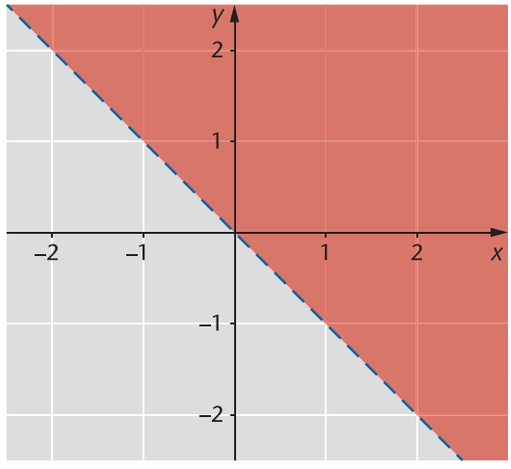


9 Väritettyä aluetta esittää epäyhtälö

a) $y < -x$

b) $y > -x$

c) $y > x$



10 Yhtälön $2^{x-3} = 1$ ratkaisu on

a) $x = 0$

b) $x = -3$

c) $x = 3$

11 Jos $\log_4 a = 3$, niin

a) $a = 64$

b) $a = 12$

c) $a = 81$

12 Lausekkeen $2 \cdot \lg 10^8$ arvo on

a) 28

b) $2 \cdot 10^8$

c) 16

13 Aritmeettiselle jonolle $a_1 = -4$ ja $a_2 = -9$. Jonon differenssi on

a) -13

b) -5

c) 5

14 Kuinka monta termiä lasketaan yhteen summassa

$$\sum_{n=2}^{12} (4n + 2)?$$

a) 12

b) 10

c) 11

15 Jonon $a_n = -6n - 3$ kymmenes jäsen on

a) -63

b) -57

c) 57

16 Geometriselle jonolle $a_n = 4$ ja $a_{n+1} = 20$ eräällä indeksin n arvolla. Jonon suhdeluku on

a) 0,2

b) 16

c) 5

17 Määritellään lukujono seuraavasti: $a_{n+1} = -a_n - n$, $a_1 = -1$. Mikä on jonon toinen jäsen?

a) -1

b) 0

c) -3

18 Mikä kolmioista on suorakulmainen, kun kolmion sivujen pituudet ovat

a) $\sqrt{5}$, 1 ja 4

b) 3, 4 ja 6

c) 2, 5 ja $\sqrt{29}$

19 Jos neliön sivun pituus on 2, sen lävistäjän pituus on

a) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{16} = 4$

c) $\sqrt{6}$

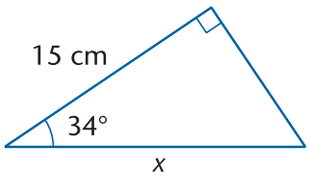
20 Kuvassa pituus x voidaan ratkaista

a) sinin

b) kosinin

c) tangentin

avulla.



21 Epäyhtälön $x^2 < 100$ ratkaisu on

a) $x < \pm 10$

b) $x < -10$ tai $x > 10$

c) $-10 < x < 10$

22 Suorien $y = 3x - 1$ ja $y = -2x + 9$ leikkauspiste on

a) $(-1, 5)$

b) $(-2, 5)$

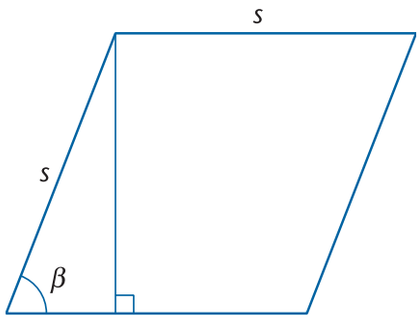
c) $(2, 5)$

23 Neljäkkään alan lauseke on

a) $s \cdot s$

b) $s^2 \cdot \sin\beta$

c) $s \cdot \sin\beta$



24 Paikka A sijaitsee päiväntasaajalla pituuspiirillä 30° itäistä pituutta. Paikka B sijaitsee samalla leveyspiirillä, mutta sen pituuspiiri on 60° läntistä pituutta. Mikä on paikkojen välinen etäisyys, kun päiväntasaajan pituus on noin 40 000 km?

a) 3 300 km

b) 20 000 km

c) 10 000 km

25 Kartion pohjan ala on 40 cm^2 ja kartion korkeus on 30 cm. Kartion sivujanan pituus on 60 cm. Kartion tilavuus on siis

a) 2 400 cm^3

b) 1 200 cm^3

c) 400 cm^3

26 Kuution kokonaispinta-ala on 24 cm^2. Kuutio leikataan tahkon suuntaisesti kahteen tilavuudeltaan yhtä suureen osaan. Syntyneet kappaleet leikataan vielä vastaavalla tavalla kahtia samansuuntaisesti kuin ensimmäisellä kerralla. Muodostuneiden kappaleiden kokonaispinta-ala on

a) 48 cm^2

b) 28 cm^2

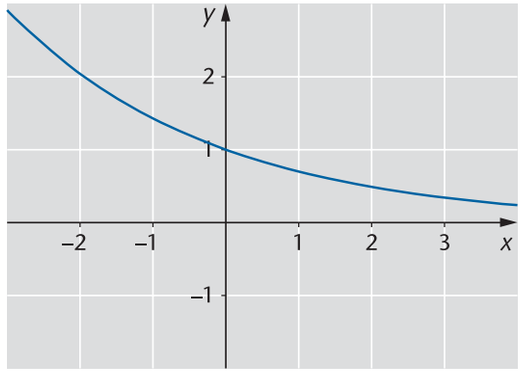
c) 36 cm^2

27 Minkä funktion kuvaaja alla on?

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = 0{,}7^x$

c) $f(x) = -2^x$



28 Yhtälöllä $x^3 = -8$

a) on ratkaisu $x = -2$

b) on ratkaisu $x = \pm 2$

c) ei ole ratkaisua

29 Lausekkeen lg1 arvo on

a) 1

b) 0

c) −1

30 Luvun 2 vastaluku on

a) 0,2

b) 0,5

c) −2

31 Luvussa 0,01020 on

a) 7 merkitsevää numeroa

b) 4 merkitsevää numeroa

c) 3 merkitsevää numeroa

32 Lukujen $\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{5}$ summa on

a) $\frac{13}{15}$

b) $\frac{3}{8}$

c) $\frac{2}{15}$

33 Viisi henkilöä, joista kolme on naisia, voidaan asettaa jonoon

a) viidellä

b) 5!

c) $\binom{5}{3}$

eri tavalla.

34 Kuuden henkilön matematiikan arvosanat olivat 7, 5, 8, 9, 7 ja 9. Tämän aineiston mediaani on

a) 7,5

b) 7 tai 9

c) 8

35 Alla olevaan taulukkoon on koottu yhden lukioluokan poikien kengännumerot. Aineiston moodi on

a) 42

b) 4

c) 7

x	*f*	*f* %	*sf*	*sf* %
40	2	10	2	10
41	4	20	6	30
42	7	35	13	
43	4	20	17	
44	3	15	20	100

36 Mitkä kaksi lukua edellisen tehtävän taulukosta puuttuvat väritetyistä ruuduista?

a) 43 ja 60

b) 40 ja 80

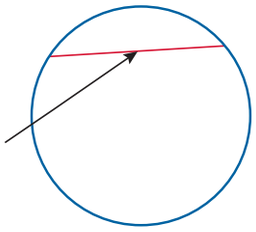
c) 65 ja 85

37 Nuolella merkityn ympyrän osan nimi on

a) jänne

b) kaari

c) segmentti

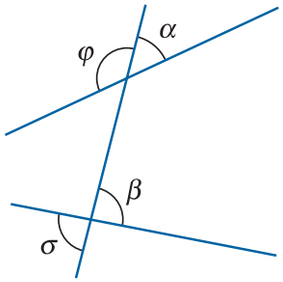


38 Mitkä kaksi kulmaa ovat samankohtaisia?

a) α ja φ

b) α ja β

c) β ja σ

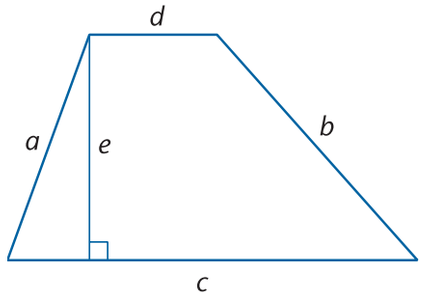


39 Mikä on kuvion pinta-ala?

a) $A = \frac{(a+b)}{2} \cdot e$

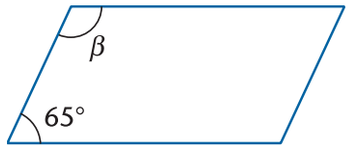
b) $A = \frac{(c+d)}{2} \cdot e$

c) $A = \frac{(a+c)}{2} \cdot e$



40 Kuinka suuri on kulma β, kun kuvio on suunnikas?

a) 195°
b) 130°
c) 115°

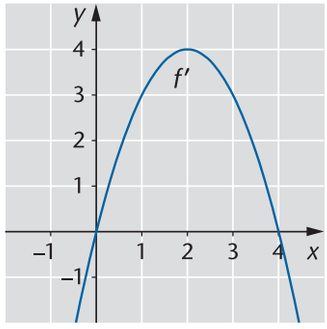


41 Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ derivaatta on

a) $f'(x) = -x^2 + 6x - 3$
b) $f'(x) = -3x^2 + 6x$
c) $f'(x) = -3x^2 + 6x - 3$

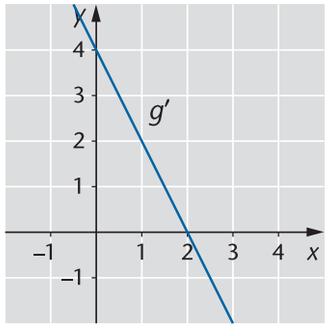
42 Kuvassa on esitetty funktion f derivaattafunktion f' kuvaaja. Funktion f

a) suurin arvo on 4
b) ääriarvokohdat ovat $x = 0$ ja $x = 4$
c) pienimmät arvot ovat 0 ja 4



43 Kuvassa on funktion g derivaatan g' kuvaaja. Funktio g on

a) kaikkialla vähenevä
b) on kasvava, kun $x \leq 2$
c) on vähenevä, kun $x \leq 2$



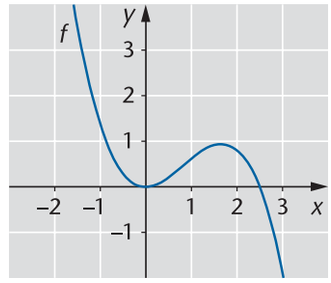
44 Alla on esitetty derivaatan merkkikaavio funktiolle f. Funktion f

a) minimikohta on $x = 7$
b) maksimikohta on $x = 7$
c) minimikohta on $x = 4$

		4		7	
f'	+		−		+

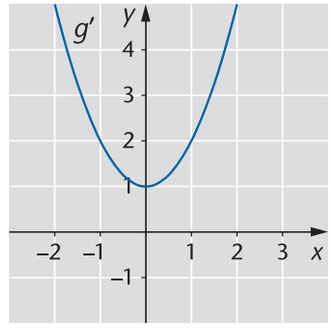
45 Kuvassa on funktion f kuvaaja.

a) Funktiolla f on kaksi ääriarvokohtaa.
b) Funktion f ääriarvokohdat ovat $x = 0$ ja $x = 2{,}5$.
c) Funktiolla f on suurin arvo ja pienin arvo.



46 Alla on esitetty funktion g derivaattafunktion g' kuvaaja. Mikä seuraavista väitteistä pitää paikkansa?

a) Funktio g on kasvava vain, kun $x \geq 0$.
b) Funktiolla g ei ole nollakohtia.
c) Funktio g on kaikkialla kasvava.



47 Olkoon $f(x) = 1 - 2x + 3x^2$.

a) $f'(0) = 0$

b) $f'(0) = -2$

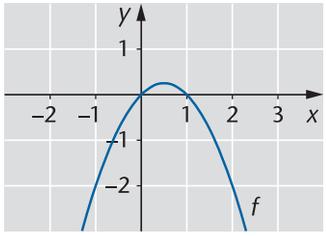
c) $f'(0) = 1$

48 Ratkaise kuvan avulla epäyhtälö $f(x) < 0$.

a) $x < 0$ tai $x > 1$

b) $0 < x < 1$

c) $x < 1$



49 Määritä funktion $f(x) = ax^2 + 2ax + a^2$ derivaatta.

a) $f'(x) = 2ax + 2a + a^2$

b) $f'(x) = 2ax + 2a$

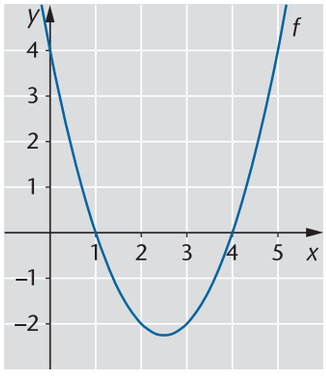
c) $f'(x) = 2ax + 2x$

50 Alla on esitetty funktion f kuvaaja. Mikä seuraavista väitteistä pitää paikkansa?

a) $f(0) = 4$

b) $f(0) = 1$

c) $f(4) = 4$

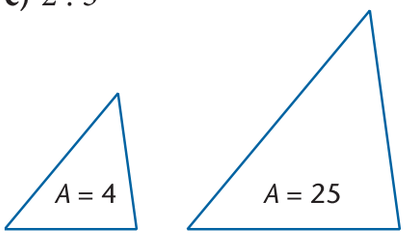


51 Alla olevat kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Mikä on niiden mittakaava?

a) 4 : 25

b) 1 : 4

c) 2 : 5



52 Laatikossa on kaksi valkoista ja kolme mustaa palloa. Laatikosta nostetaan kaksi palloa palauttamatta niitä laatikkoon. Millä todennäköisyydellä molemmat pallot ovat mustia?

a) $\frac{3}{10}$

b) $\frac{3}{5}$

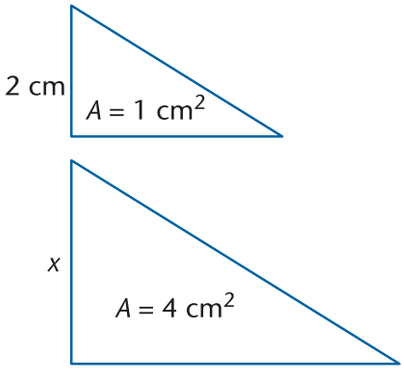
c) $\frac{1}{10}$

53 Kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Mikä on janan pituus x?

a) 8 cm

b) 4 cm

c) 6 cm



54 Geometrisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = 2$ ja $a_2 = 8$. Jonon yleinen jäsen on

a) $a_n = 2 \cdot 8^n$

b) $a_n = 2 \cdot 4^n$

c) $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$

55 Aritmeettisen jonon yleinen jäsen on $a_n = 4 - 7n$. Jonon differenssi on

a) 4

b) 7

c) -7

56 Mikä seuraavista funktioista kuvaa eksponentiaalista vähenemistä?

a) $0{,}2 \cdot 5^x$

b) $0{,}2 \cdot 0{,}5^x$

c) $-0{,}2 \cdot 5^x$

57 Mikä seuraavista on yhtälön $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ juuri?

a) -1

b) 3

c) 0

58 Mikä seuraavista suorista on kohtisuorassa suoraa $y = -0{,}5x + 3$ vastaan?

a) $y = 0{,}5x + 3$

b) $y = -0{,}5x - 3$

c) $y = 2x + 3$

59 Kahta noppaa heitetään. Millä todennäköisyydellä molemmilla nopilla saadaan sama silmäluku?

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{36}$

c) $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

60 Heitetään kolmea rahaa. Millä todennäköisyydellä saadaan kolme klaavaa?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{8}$

61 Funktion $f(x) = x^2 - 10x$ derivaatalla on nollakohtana

a) $x = 0$

b) $x = 5$

c) $x = 10$

62 Muuttuja x noudattaa normaalijakaumaa siten, että $x \sim N(10, 2)$. Normita tämän avulla muuttujan arvo $x = 22$.

a) $z_{22} = 12$

b) $z_{22} = 8$

c) $z_{22} = 6$

63 Aritmeettiselle jonolle $a_5 = 27$ ja $a_8 = 45$. Mikä on jonon differenssi?

a) 18

b) 9

c) 6

64 Suora kulkee pisteiden $(0, -3)$ ja $(1, -5)$ kautta. Määritä suoran yhtälö.

a) $y = -2x - 3$

b) $y = -1{,}2x - 3$

c) $y = -5x - 3$

65 Lottoarvonnassa arvotaan 32 numeron joukosta 8. Millä todennäköisyydellä saadaan 5 oikein?

a) $\dfrac{\binom{8}{5}\binom{24}{3}}{\binom{32}{8}}$

b) $\dfrac{\binom{8}{5}\binom{32}{3}}{\binom{32}{8}}$

c) $\dfrac{\binom{8}{5}}{\binom{32}{8}}$

66 Tasakylkisen kolmion kantakulma on 15 astetta suurempi kuin huippukulma. Kuinka suuri on huippukulma?

a) 30 astetta
b) 40 astetta
c) 50 astetta

67 Kuution särmän pituus on 1. Kuution avaruuslävistäjän pituus on tällöin

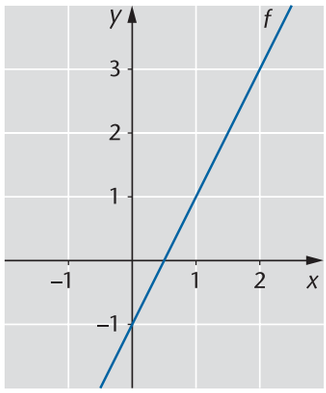
a) 1
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$

68 Muuttuja x noudattaa normaalijakaumaa. Jakauman keskiarvo on 12 ja keskihajonta σ. Muuttujan $x = 18$ normitettu arvo on 1,5. Mikä on jakauman keskihajonta σ?

a) 4
b) 6
c) 16,5

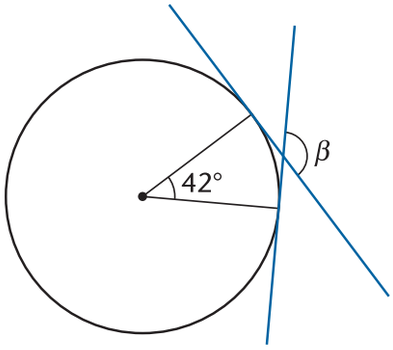
69 Etsi kuvan avulla se muuttujan x arvo, jolle $f(x) = 3$.

a) $x = -1$
b) $x = 2$
c) $x = 0$



70 Kaksi tangenttia sivuaa ympyrää. Kulma β on

a) 48°
b) 112°
c) 138°



71 Lauseke $\dfrac{a^2\left(ab^3\right)^4}{a^5b^{10}}$ sievenee muotoon

a) $\dfrac{a}{b^8}$
b) ab^2
c) $a^{3b}b^2$

72 Lauseke $\dfrac{x^2+3x}{x+3}$ sievenee muotoon

a) $x+3$
b) x
c) x^2+x

73 Lauseke $(-2x^4)^0$ on sievennettynä

a) -1

b) 0

c) 1

74 Leipomo valmistaa sekaleipiä ja sämpylöitä. Leipomo käyttää yhden leivän valmistamiseen 200 g vehnäjauhoja ja 150 g ohrajauhoja. Sämpylään tarvitaan 50 g vehnäjauhoja ja 40 g ohrajauhoja. Vehnäjauhoja on käytössä 15 kg ja ohrajauhoja 10 kg. Mikä seuraavista epäyhtälöistä sopii tilanteeseen?

a) $0{,}2x + 0{,}15y \leq 15$

b) $0{,}2x + 0{,}05y \leq 15$

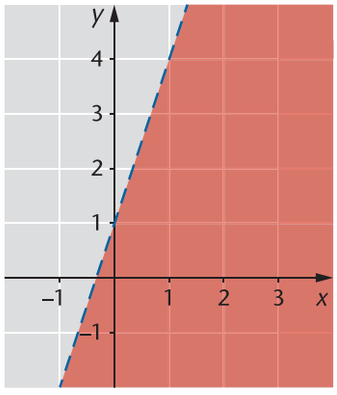
c) $200x + 150y \geq 15$

75 Mikä epäyhtälö määrittelee kuvan väritetyn alueen?

a) $y < 3x + 1$

b) $y > 3x + 1$

c) $y < -3x + 1$

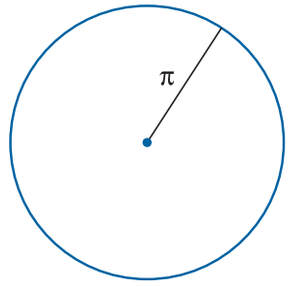


76 Mikä on kuvan ympyrän ala?

a) πr^2

b) π^2

c) π^3



77 Mikä seuraavista on yhtälön $\log_x 16 = 2$ ratkaisu?

a) $x = 2$

b) $x = 8$

c) $x = 4$

78 Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on 2 ja kuudes jäsen on 12. Laske kuuden ensimmäisen jäsenen summa.

a) 42

b) 28

c) 36

79 Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 16 ja kolmion korkeus on 6. Kyljen pituus on tällöin

a) 22

b) 10

c) $\sqrt{292}$

80 Ratkaise x yhtälöstä $\lg\left(\frac{x}{2}\right) = 2$.

a) $x = 40$

b) $x = 100$

c) $x = 200$

81 Radioaktiivista ainetta on mittauksen alkaessa 250 grammaa. Aineesta hajoaa joka tunti 10 %. Kun on kulunut t tuntia, ainetta on jäljellä

a) $250 \cdot 10^t$ (g)

b) $250 \cdot 1{,}1^t$ (g)

c) $250 \cdot 0{,}9^t$ (g)

82 Lukujen 3, 7 ja x keskiarvo on 7. Mikä on luku x?

a) 10

b) 11

c) 12

83 Lukua a pienennetään ensin 50 %, mutta kasvatetaan sitten 50 %. Miten a:n suuruus muuttuu

a) ei mitenkään

b) pienenee 25 %

c) pienenee 5 %

84 Lauseke $(3x-1)^2$ sievenee muotoon

a) $9x^2-1$

b) $9x^2-6x+1$

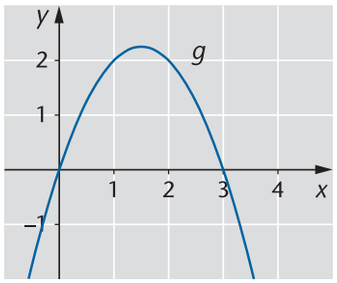
c) $9x^2-6x-1$

85 Alla on funktion g kuvaaja. Päättele sen avulla $g'(2)$.

a) -1

b) 2

c) -2



86 Kolme herttaa ja kaksi pataa asetetaan pöydälle riviin arpomalla. Kuinka monta sellaista järjestystä on olemassa, jossa hertat ovat peräkkäin?

a) $3 \cdot 3! \cdot 2!$

b) $3 \cdot 5!$

c) $3 \cdot 2!$

87 Otto on heittänyt nopalla jo kolme kuutosta. Millä todennäköisyydellä hän saa vielä neljännen kuutosen?

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$

b) $4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$

c) $\frac{1}{6}$

88 Mitkä ovat yhtälön $(2x-4)(x+3)^2 = 0$ ratkaisut?

a) $x = -2$ ja $x = -3$

b) $x = -2$ ja $x = 3$

c) $x = 2$ ja $x = -3$

89 Lauseke $\left(2\sqrt{3}\right)^2$ sievenee muotoon

a) $4\sqrt{3}$

b) 6

c) 12

90 Mikä on luvun 1,2 käänteisluku?

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{5}$

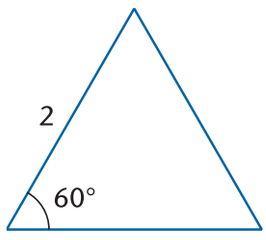
c) 2,1

91 Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 2. Mikä seuraavista **ei ole** kolmion korkeusjanan pituus?

a) $\sin 60°$

b) $\tan 60°$

c) $\sqrt{3}$

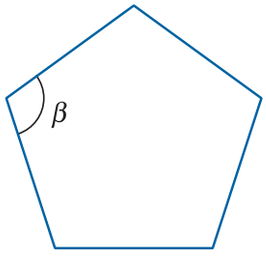


92 Kuvio on säännöllinen viisikulmio. Kuinka suuri on kulma β?

a) 108°

b) 72°

c) 144°



93 $1-(1-x)^2$ sievenee muotoon

a) x^2

b) x^2-2x

c) $-x^2+2x$

94 Tiedetään, että $\frac{a+b}{ab}=3$. Mikä on a:n lauseke b:n avulla lausuttuna.

a) $a=\frac{b}{3b+1}$

b) $a=\frac{b}{3b-1}$

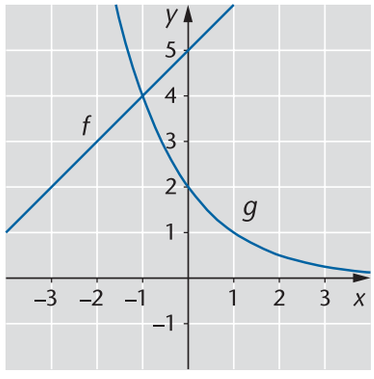
c) $a=\frac{b}{1-3b}$

95 Funktioiden f ja g kuvaajat on esitetty alla. Yhtälön $f(x)=g(x)$ ratkaisu on

a) $x=4$

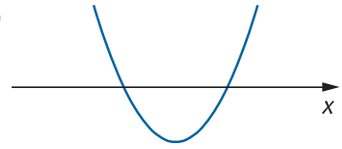
b) $x=-1$

c) $x=0$

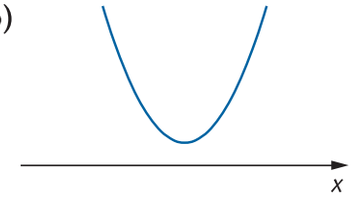


96 Mikä kuvaajista esittää funktiota $f(x)=x^2+2$?

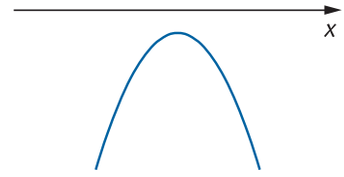
a)



b)



c)

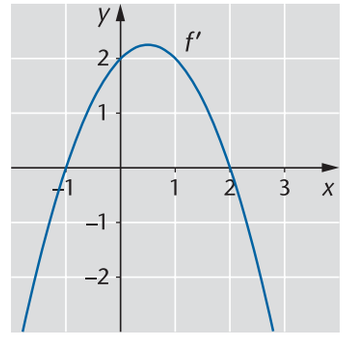


97 Alla on esitetty funktion f derivaattafunktion f' kuvaaja. Funktiolla f on maksimi kohdassa

a) $x=-1$

b) $x=0{,}5$

c) $x=2$

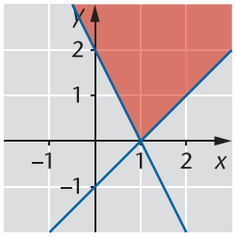


98 Epäyhtälöryhmän

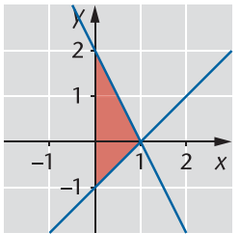
$$\begin{cases} y \le -2x + 2 \\ y \ge x - 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

graafista ratkaisua esittää

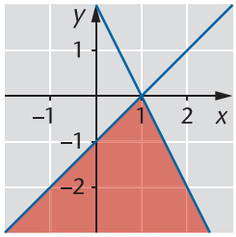
a)



b)



c)

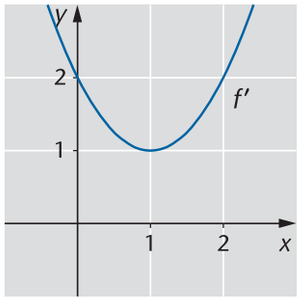


99 Alla on funktion f derivaatan f' kuvaaja. Mikä seuraavista väitteistä pitää paikkansa?

a) f on kasvava vain, kun $x \ge 1$

b) f on kasvava vain, kun $x \ge 0$

c) f on kasvava kaikilla muuttujan x arvoilla



100 Yhtälön $2^{x+2} = \frac{1}{4}$ ratkaisu on

a) $x = -2$

b) $x = -4$

c) $x = -6$

Harjoituskoe I

Osa A – Ilman laskinta

Vastaa kaikkiin tämän osan tehtäviin.

1 **a)** Laske lausekkeen $\dfrac{a+2b}{a}$ arvo, kun $a=\dfrac{3}{4}$ ja $b=-\dfrac{1}{8}$.

b) Ratkaise yhtälö $-3x+x^2=0$

c) Sievennä lauseke $x-(x-1)^2-x^2$.

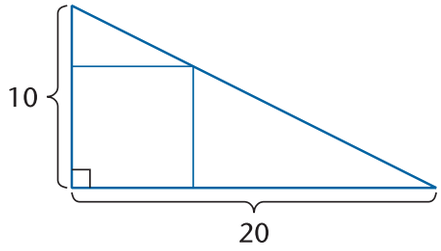
2 Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on 5 ja toinen jäsen on 8.

a) Määritä jonon yleinen jäsen.

b) Mikä on jonon 100. jäsen?

c) Onko luku 56 tämän jonon jäsen? Perustele vastauksesi.

3 Suorakulmaisen kolmion sisään on piirretty neliö siten, että neliön kärkipiste sijaitsee hypotenuusalla. Määritä neliön sivun pituus.



4 Alla olevassa kuvassa on esitetty funktion f derivaattafunktion f' kuvaaja. Vastaa kuvan avulla kysymyksiin.

a) Määritä $f'(0)$.

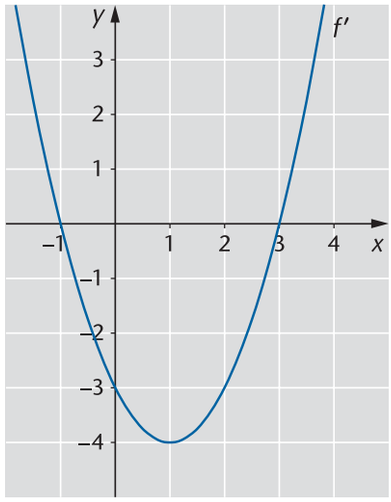
b) Ratkaise yhtälö $f'(x)=-4$.

c) Mitkä ovat funktion f ääriarvokohdat?

d) Milloin f on kasvava?

e) Milloin $f'(x)<0$?

f) Laske $\left|f'(-1)-f'(2)\right|$.



Osa B1 – Laskimen kanssa

Valitse kolme tämän osan tehtävää.

5 Suomen valtion talousarvion loppusumma vuonna 2014 oli 54,1 miljardia euroa. Budjetti on 7,2 miljardia euroa alijäämäinen. Alijäämä katetaan ottamalla tämä summa velkaa, jolloin valtion velka nousee sataan miljardiin euroon.

a) Jos budjetin loppusumma jaettaisiin tasan kaikkien suomalaisten kesken, kuinka paljon kukin saisi? Suomessa väkiluku vuonna 2014 oli 5 453 798.

b) Jos jokaiselta suomalaiselta kerättäisiin hätäverona ylimääräiset 500 €, kuinka paljon lisävelkaa jouduttaisiin kuitenkin ottamaan?

6 Tarkastellaan funktiota $g(x) = -20x^2 + 20x - 5$.

a) Missä pisteissä funktion kuvaaja leikkaa koordinaattiakselit?

b) Määritä kuvaajan huippupiste.

7 Tavallisesta 52 kortin pakasta vedetään kuusi korttia palauttamatta niitä pakkaan.

a) Millä todennäköisyydellä kaikki ovat herttoja?

b) Millä todennäköisyydellä saadaan ainakin yksi risti?

c) Millä todennäköisyydellä saadaan kaksi pataa?

8 Kimalaiskolibrin munien paino noudattaa likimain normaalijakaumaa. Munien keskimääräinen paino on 0,5 g ja niiden keskihajonta on 0,06 g.

a) Millä todennäköisyydellä muna painaa yli 0,7 g?

b) Eräästä pesästä löydettiin muna, joka painoi 0,8 g. Poikkeaako tämän munan paino merkitsevästi keskiarvosta?

9 Majakan korkeus on 32,0 m. Kuinka kauas merelle majakan huipusta nähdään maanpintaa pitkin? Maapallon säde on 6371 km.

Osa B2 – Laskimen kanssa

Valitse kolme tämän osan tehtävää.

10 Henkilö tallettaa kummilapselleen 1000 € heti lapsen syntymän jälkeen vuoden alussa Tämän jälkeen hän tallettaa joka vuosi saman summan. Pankki maksaa talletukselle 3,0 % vuosikoron. Korko liitetään pääomaan vuosittain aina vuoden lopussa. Kuinka paljon rahaa tilillä on sen vuoden lopussa, kun lapsi täyttää 18 vuotta?

11 Hendersonin–Hasselbalchin yhtälön avulla voidaan määrittää puskuriliuoksen pH. Puskuriliuos sisältää happoa HA ja sen vastinemästä A^-. pH:n laskemiseen tarvitaan lisäksi hapon happovakion K_a arvo.

$$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \lg\left(\frac{[\mathrm{A}^-]}{[\mathrm{HA}]}\right), \text{ missä}$$

$[A^-]$ on vastinemäksen konsentraatio (mol/l)
[HA] hapon konsentraatio (mol/l)
$\mathrm{p}K_a = -\lg K_a$.

a) Liuos sisältää etikkahappoa CH_3COOH ja sen vastinemästä CH_3COO^-. Aineiden konsentraatiot liuoksessa ovat $[CH_3COOH] = 0{,}28$ mol/l ja $[CH_3COO^-] = 0{,}25$ mol/l. Etikkahapon happovakio on $K_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$. Laske puskurin pH.

b) Liuos sisältää muurahaishappoa HCOOH ja sen vastinemästä $HCOO^-$. Liuoksen pH = 4,00. Määritä muurahaishapon happovakio K_a, kun $[HCOOH] = 0{,}16$ mol/l ja $[HCOO^-] = 0{,}28$ mol/l.

12 Louvren palatsin sisäpihalla on lasista ja metallista valmistettu pyramidi, jonka Ranskan presidentti Mitterrand tilasi vuonna 1983. Pyramidin korkeus on 21,64 metriä. Pyramidin pohja on neliö, jonka piiri on 141,68 metriä. Pyramidin sivuseinät muodostuvat lasista valmistetuista vinoneliöistä ja kolmioista. Laske pyramidin tilavuus. Kuinka monta neliömetriä lasia pyramidin sivuseinien valmistamiseen on käytetty? Metallin osuus seinien rakenteissa ei oteta huomioon.

13 Funktiolla $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 24x$ on minimi -11 kohdassa $x = -1$. Määritä vakio a. Mikä on tämän funktion maksimi ja missä kohdassa se saadaan?

Harjoituskoe 2

Osa A – Ilman laskinta

Vastaa kaikkiin tämän osan tehtäviin.

1 **a)** Ratkaise yhtälö $\frac{x-2}{3}+1=\frac{x}{2}$.

b) Laske lausekkeen $(a+b)^2-a(a+2b)$ arvo, kun $a=\frac{3}{7}$ ja $b=-\frac{1}{2}$.

c) Missä pisteissä suora $2x+y=6$ leikkaa koordinaattiakselit?

2 **a)** Ratkaise yhtälö $2^{3x-1}=4^x$.

b) Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases}3x-y=5\\x+y=1\end{cases}$.

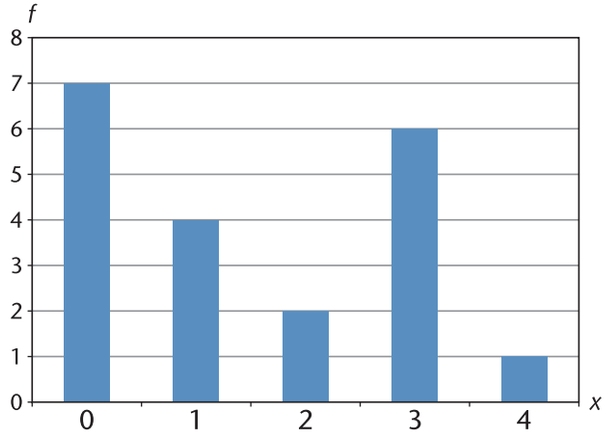
c) Tasakylkisen kolmion kylki on 10,0 cm ja kanta 16,0 cm. Laske kolmion korkeus.

3 Tarkastellaan funktiota $f(x)=x(x-6)$

a) Laske funktion nollakohdat.

b) Laske $f'(-5)$. Onko funktio kasvava vai vähenevä kohdassa $x=-5$?

4 Alla on muuttujan x frekvenssijakauma.



Määritä jakauman perusteella muuttujan x

a) moodi

b) mediaani

c) keskiarvo.

Osa B1 – Laskimen kanssa

Valitse kolme tämän osan tehtävää.

5 **a)** Sijoitusrahaston arvo laski vuoden alussa 35 %. Vuoden aikana rahaston arvo nousi ensin 10 % ja sitten 15 %. Kuinka monta prosenttia rahaston arvon pitäisi vielä nousta ennen vuoden loppua, jotta sijoitusrahaston arvo olisi vuoden lopussa sama kuin se oli vuoden alussa ollut?

b) Mars-planeetan tilavuus on likimain $1{,}63 \cdot 10^{11}$ km^3 ja Maan tilavuus noin $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3. Kuinka monta prosenttia suurempi Maan säde on Marsin säteeseen verrattuna? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

6 Keretin kaivoskuilun syvyys on 408 m. Kaivoksen henkilöhissin nopeus on 6,5 m/s ja maksimikuorma 29 henkilöä.

a) Kuinka kauan kestää kaivoksen 205 miehen siirtyminen kuilun pohjalle?

b) Kupariharkon koko on 20 cm × 10 cm × 5 cm. Laske kymmenen kupariharkon massa, kun kuparin tiheys on 8,96 kg/dm^3.

7 Tarkastellaan paraabelia $y = 2x^2 + 3x - 8$ sekä suoraa $y = 2 - 5x$.

a) Laske suoran ja paraabelin leikkauspisteiden koordinaatit.

b) Millä muuttujan x arvoilla suora kulkee paraabelin yläpuolella?

c) Paraabelille piirretään suoran $y = 2 - 5x$ suuntainen tangentti. Mihin kohtaan tämä tangentti piirretään?

8 Praha ja Frankfurt sijaitsevat likimain samalla leveyspiirillä 50° pohjoista leveyttä. Pituuspiirien välinen ero on noin 6° ja Maan säde 6370 km.

a) Kuinka pitkä matka on Prahasta Frankfurtiin maan pintaa pitkin?

b) Jos Prahan ja Frankfurtin välille kaivettaisiin maan läpi suora tunneli, niin kuinka monta metriä kaupunkien välinen matka lyhenisi?

9 Olkoon $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 + 7x + 1$.

a) Funktion kuvaajalle piirretään kohtaan $x = 0$ tangentti. Määritä tangentin yhtälö.

b) Määritä funktion f suurin ja pienin arvo välillä $1 \le x \le 8$.

Osa B2 – Laskimen kanssa

Valitse kolme tämän osan tehtävää.

10 Ylioppilastutkinnon matematiikan koe muodostuu 10 tehtävästä. Vanhanmuotoisessa matematiikan kokeessa on 15 tehtävää, joista opiskelijan tulee valita 10 tehtävää arvosteltavaksi. Uudenmuotoisessa matematiikan kokeessa on kolme osaa. Eri osien tehtävien määrät sekä vastattavien tehtävien määrät on koottu seuraavaan taulukkoon.

Osio	Tehtäviä	Kuinka monta tehtävää valitaan?
A	4	4
B1	5	3
B2	4	3

Kokeeseen osallistuva opiskelija vastaa kymmeneen tehtävään. Kuinka monta erilaista tehtäväkokonaisuutta kokeeseen osallistuva opiskelija voi muodostaa

a) vanhanmuotoisessa kokeessa

b) uudenmuotoisessa kokeessa?

11 Suorakulmaisen kolmion lyhyemmän kateetin pituus on 7,8 cm ja hypotenuusan pituus 12,7 cm.

a) Laske kolmion pienemmän terävän kulman suuruus asteen tarkkuudella.

b) Kun suorakulmainen kolmio pyörähtää lyhyemmän kateetin ympäri, syntyy avaruuskappale. Laske tämän avaruuskappaleen tilavuus.

12 Toisen asteen polynomifunktiolla $f(x) = x^2 + 3ax + 2b$ on kaksi nollakohtaa, $x = a$ ja $x = b$. Nollakohtien keskiarvo on -3.

a) Määritä funktion nollakohdat.

b) Määritä funktion f kuvaajan huippupisteen koordinaatit.

13 Eräässä strategiapelissä pelaaja rakennuttaa erilaisia parannuksia, kuten sairaalan tai koulun, käyttämällä siihen insinöörejä tai uudisasukkaita. Insinööri työskentelee 8 h päivässä, kun taas uudisasukas vain 4 h. Palkkaa insinööri saa 6 kultarahaa päivässä ja uudisasukas 2. Molemmat syövät saman verran, 2 leipää, päivässä. Pelaajan on rakennutettava viemärilaitos mahdollisimman nopeasti (siten, että työntekijät tekevät vuorokauden aikana mahdollisimman monta työtuntia, jolloin koko projektiin kuluu vähemmän päiviä). Pelaajalla on varattuna hankkeeseen 60 kultarahaa ja 52 leipää. Kuinka monta insinööriä ja kuinka monta uudisasukasta pelaajan pitää viemärilaitoksen rakentamiseen käyttää?

Vastaukset

1 Lausekkeen sieventäminen

1 a) x^8 b) $10a^{13}$
c) a^{12} d) x^{30}

2 a) a^4 b) $\frac{8}{27}$
c) $\frac{1}{8a^6}$ d) $\frac{x^{10}}{16}$

3 ab

4 $-\frac{1}{12}$

5 a) $3x+1$ b) $4x^2-11x+6$
c) $9a^2-12a+4$

6 a^2

7 summa x^2-x+1
tulo $-2x^4+7x^3-7x^2+2x$

8 a) $-8x-1,\ 7$
b) $-x^2+4x+2,\ -3$

9 $x+1$

10 a) -1 b) $\frac{1}{9}$

11 $\frac{13}{12}$

12 -5

13 $2x,\ 1$

14 3

15 6

16 a) $2x^2-x$
b) $\frac{1}{2+4a}$

17 $1-2a$

18 a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) x^{2n}

19 $\frac{13x-12y}{6}$

20 $\frac{2}{x^2-1}$

21 $\frac{1}{3}$

22 72

23 2

24 $\frac{2}{13}$

25 $\frac{5}{11}$

26 a^2

27 Alpon osuus 7,30 €
Sannan osuus 10,45 €
Paulin osuus 15,75 €

28 89,4 kg

29 a) 332 980-kertainen
b) 2 690 % suurempi

30 a) 12 910 kWh
b) 21,1 miljardia €

31 Japanilainen auto kuluttaa vain 6,8 litraa sadalla kilometrillä eli vähemmän kuin amerikkalainen.

32 a) $3{,}99 \cdot 10^{13}$ km
b) 0,7730 valovuotta

33 33,1 %

34 Kotimaisen ydinvoiman osuus on 38,2 %. Tuontisähkön osuus on 13,8 %.

35 134,9 %

36 0,4 % pienempi

37 Myyntitulo on noussut $1{,}12 - 1 = 0{,}12 = 12$ %.

38 3,6 %

39 Tiheys on pienentynyt $1 - 0{,}625 = 0{,}375 = 37{,}5$ %.

2 Ensimmäisen asteen yhtälöt ja epäyhtälöt

40 a) $x=\frac{7}{2}$ b) ei ratkaisua
c) ratkaisuna kaikki reaaliluvut

41 $x=4$

42 $x=\frac{8}{3}$

43 $x=17$

44 $x=-2$

45 $x=\frac{5}{2}$

46 $x=4$

47 $x=\frac{6}{5}$

48 $x=\frac{12}{5}$

49 $x=-1$

50 $x=-10$

51 $x=-3$

52 $x=-\frac{1}{4}$

53 $x=-\frac{13}{30}$

54 $x=2$

55 $x=\frac{b}{a}$

56 a) $x>\frac{1}{3}$ b) $x\geq -2$

57 a) $x\geq -1$ b) $x<-7$

58 $x>-3$

59 $x<-\frac{1}{5}$

60 $y=\frac{35}{2}=17\frac{1}{2}$

61 $y=\frac{6}{5}$

62 7,8 cm

63 2,2 kg/dm^3

64 4,2 %

65 2 h 13 min 20 s

66 Beethoven 56 v, Mozart 35 v, Bach 65 v

67 a) pienempi b) 61 %

68 87,5 ml

69 2,25 litraa

70 2,0 litraa

71 28,6 %

72 300 g

73 117,5 km/h

74 104,7 km:n päässä, klo 9.12

75 26,2 %, 2 093,75 €

76 21,7 %

3 Toisen asteen yhtälöt ja epäyhtälöt

77 a) $x = 0$ tai $x = 8$
b) $x = \pm 4$
c) $x = 0$ tai $x = 3$

78 $x = 0$ tai $x = 2$

79 $x = \pm 1$

80 $x = 0$ tai $x = -\frac{3}{7}$

81 $x = 4$ tai $x = 0$

82 $x = \pm 3$

83 $x = 3$

84 $x = \pm 2$

85 a) $x = 1$ tai $x = -4$
b) $x = -1$ tai $x = -3$
c) $x = 1$

86 $x = -1$ tai $x = -2$

87 a) $a < 4$ b) $a = \frac{7}{2}$

88 (0, 2), (–2, 0) ja $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

89 (0, 1), $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ ja (–1, 0)

90 $-2 < x < 0$

91 $-1 < x < 1$

92 $a = 2$, $b = 1$ ja $k = -3$

93 $x = -7$

94 $x = -\frac{3}{2}$

95 $x = \frac{3}{2}$ tai $x = \frac{1}{2}$

96 $x = \frac{1}{7}$ tai $x = -\frac{4}{7}$

97 nollakohdat $x = 3$ ja $x = -\frac{3}{2}$, huippupiste $\left(\frac{3}{4}, -10\frac{1}{8}\right)$

98 a) Paraabeli aukeaa ylöspäin ja sen nollakohdat ovat $x = 4$ ja $x = -6$. Huippupiste on (–1, –25).
b) Paraabeli aukeaa alaspäin ja sen nollakohdat ovat $x = 2$ ja $x = 8$. Huippupiste on (5, 18).

99 $x \le -3$ tai $x \ge -2$

100 a) $x = \frac{1}{2}$ tai $x = -6$
b) $-6 < x < \frac{1}{2}$

101 $-3 < x < \frac{1}{2}$

102 a) (7, 0) ja (5, 0)
b) (6, –1)

103 $a = 1$

104 134 cm

105 55,8 tonnia

106 a) 44 m b) 56 km/h

107 a) 3,6 m
b) 0,2 m

108 0,9 m

109 250 km, 600 €/m^2

4 Lineaarinen malli

110 $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$

111 $y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$

112 $y = \frac{7}{3}x + \frac{14}{3}$

113 ei kulje

114 a) $y = \frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}$ b) ei ole

115 (0, 5) ja $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

116 a) $y = 3x - 7$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$

117 $y = -2x + 7$

118 a) $y = 7x - 8$ b) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

119 $x = 3$, $y = 5$

120 $x = -2$, $y = -1$

121 $x = \frac{7}{5}$, $y = \frac{6}{5}$

122 $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

123 suorien yhtälöt $y = 1$ ja $y = -\frac{3}{2}x + 3$, leikkauspiste $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$, $A = \frac{4}{3}$

124 $P(-1, -5)$, suora s: $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$

125 $y = -3x + 13$, akselien leikkauspisteet (0, 13) ja $\left(\frac{13}{3}, 0\right)$

126 a) $A = 1$ b) $A = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$

127 $a = -7$

128 $a = 2$, suora on nouseva

129 a) $b = -3$ b) (0, –3) c) 56,3°

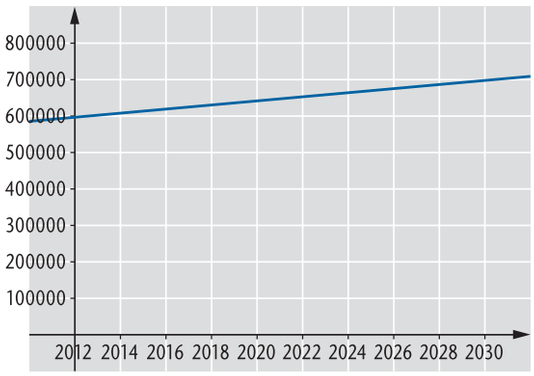
130 56,3°

131 a) 158 cm b) ei ole

132 a) $a = \frac{11\,239}{2} \approx 5\,619,25$, $b = 607\,416$

b) 90 000 asukasta

c)



133 $a = -\frac{18}{11}$ tai $a = \frac{18}{7}$

134 12 kaniinia, 22 fasaania

135 perusmaksu 6,6 €, lisämaksu 0,9 €/km

136 2 kuppia pannukahvia, 3 kuppia suodatinkahvia

137 A: 22 litraa, B: 12 litraa

138 ensimmäistä seosta 120 g, toista 180 g

139 Antti: $y = 120x$, Erin: $y = 100x + 30$, kohtaavat 1,5 h:n kuluttua

140 102 km

141 a) $(-6, 9)$ b) 11 km

5 Epäyhtälöryhmät ja optimointi

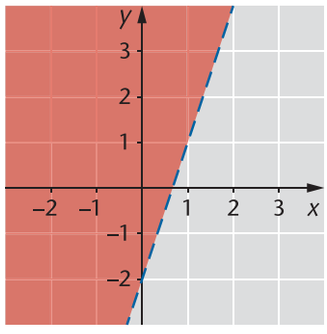
142 $\begin{cases} y \le 5x - 1 \\ y \le -2x + 3 \\ y \ge 1 \end{cases}$

143 $\begin{cases} y \ge -x - 1 \\ y \ge 2x - 6 \\ y \ge -2 \\ x \ge -3 \end{cases}$

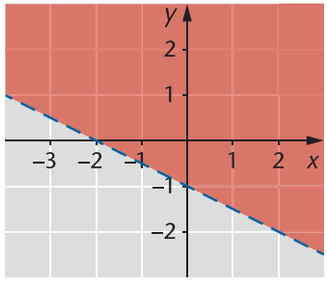
144 a) $\begin{cases} y \le -\frac{3}{5}x + 3 \\ y \le -2x + 6 \\ y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \ge -\frac{3}{2}x + 3 \\ y \ge -\frac{2}{5}x + 2 \\ y \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$

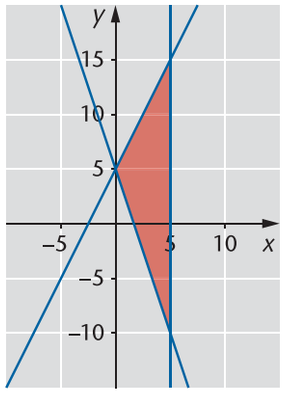
145 a)



b)



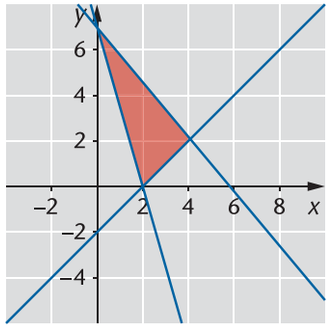
146



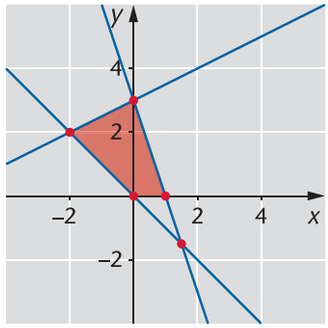
147 $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}15y \le 20 \\ 0{,}2x + 0{,}15y \le 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

148 $\begin{cases} 0{,}16x + 0{,}04y \le 0{,}03 \\ 20x + 25y \ge 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

149



150

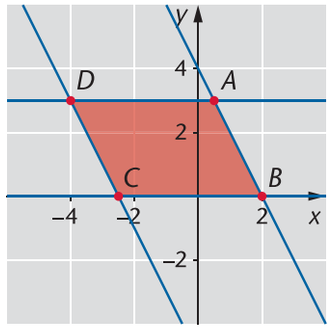


$A = 3 + \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2}$

151 $\begin{cases} y \ge -x + 8 \\ y \le -\frac{1}{3}x + 18 \\ y \ge 3 \end{cases}$

$A = 4$

152 Kuvio on suunnikas, jonka ala on 13,5.



153 Kärkipisteet ovat (0, 0), (0, 9), (6, 0) ja $\left(2, 6\frac{2}{3}\right)$.

Suurin arvo on $8\frac{2}{3}$.

154 Merjan on kudottava 9 kappaletta mallia A ja 6 kappaletta mallia B.

155 On ostettava $6\frac{2}{3}$ pikarillista

Ascensusta eikä yhtään Sursumia.

156 Kilpailijan kannattaa kerätä 40 kultarahaa ja 20 hopearahaa.

157 Leipomon kannattaa valmistaa 800 terveyspullaa ja 600 terveyssämpylää. Jos valmistetaan vain terveyssämpylöitä, vehnäjauhoja jää käyttämättä 21 kg.

158 Putkosten kannattaa ajaa 280 km pikkuteitä ja 240 km moottoriteitä.

6 Eksponentiaalinen malli

159 $x^5 \to$ C, $3^x \to$ D, $\left(\frac{1}{3}\right)^x \to$ A,

$x^6 \to$ E, $6^x \to$ F, $\left(\frac{1}{6}\right)^x \to$ B

160 a) $x = \pm 4$ b) $x = 3$

161 a) $x = \pm 1$ b) $x = 10$

162 $x = -5$

163 a) $x = -\frac{1}{2}$ b) $x = \frac{1}{4}$ c) $x = -\frac{1}{2}$

164 $x = \frac{4}{3}$

165 a) $x = 0$ b) $x = \pm\sqrt{2}$

166 $x = 4$

167 $x = \frac{1}{2}$

168 $x = 3$

169 a) $x = \frac{9}{2}$ b) $x = 1\,004$

170 $x = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$

171 $x \approx \pm 2{,}031$

172 $x = 10$

173 a) $x \approx 1{,}29$ b) $x \approx 0{,}50$
c) $x \approx 0{,}57$

174 58 €

175 4,49 % tunnissa

176 8 vuodessa

177 4,22 %

178 12,2 %

179 1 612 vuotta

180 1,2 % vuodessa, 589 979 asukasta vuonna 2015

181 vuonna 2049

182 puoliintumisaika 8 vrk, aktiivisuus 10 vuorokauden kuluttua on 10,5 kBq

183 puoleen vuonna 2017, neljännekseen 2047, pienempi aktiivisuus vähentynyt puoleen vuonna 2017

184 a) – b) $y = \sqrt[3]{x^2}$
c) 9,538 au

185 a) $1{,}58 \cdot 10^{18}$ J
b) 1 472-kertainen

186 a) 175 cm, 200 cm, 196 cm
b) 68-vuotiaana

187 a) $a \approx 0{,}35$ b) –

7 Lukujonot

188 a) $a_n = 3n + 1$
b) Ei ole.
c) 91

189 $\frac{8}{27}$

190 28

191 $d = -6,\ a_n = -6n + 1$

192 $a_3 = 20,\ a_4 = 56,\ a_5 = 192$

193 a) 91 b) 310

194 a) $a_n = -8n + 18$
b) $a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

195 16

196 $k = 10{,}2$

197 $k = 10$

198 $k = 2$ tai $k = -1$

199 $5\frac{1}{2}$

200 a) −3 500 b) $7{,}51 \cdot 10^{14}$

201 a) 1 081 b) −10 761 678

202 a) 82 b) 30

203 a) enintään 53 jäsentä
b) enintään 7 jäsentä

204 a) 2 180 b) 828 000 000

205 935 vuoden kuluttua

206 a) 765 000 €
b) 16 vuoden kuluttua

207 223 tonnia

208 a) 514 500 mökkiä b) 2 036

209 130 min

210 Levyt riittävät 10 viikoksi.

211 a) noin 3,1 miljoonaa
b) 45 vuoden kuluttua

212 $a_n = 2 \cdot 1{,}05^{n-1}$, 411 ensimmäistä ovat pienempiä kuin 1 000 miljoonaa, summa on $2{,}05 \cdot 10^{10}$

213 115 115

214 96. termistä alkaen

215 52 600 m^3

216 Summa ylittyy 19. vaiheen jälkeen.

217 $S_n = 2^{n+1} - 2$
Viidessä viikossa asiakkaita on $2^{5+1} - 2 = 62$. Aikaa kuluisi 13 viikkoa.

218 Korkoa toisen vuoden jälkeen maksetaan 3 225,6 €. Korot yhteensä 30 844,48 €. Takaisinmaksu kestää 17 vuotta.

219 3

220 a) 1 111,75 €
b) 66 vuoden kuluttua

221 1 995 m

222 enintään 44 ruutuun

223 a) $a_1 = 1\frac{5}{6} \approx 1{,}83,$
$a_2 = 1\frac{61}{132} \approx 1{,}46,$
$a_3 = 1{,}4149... \approx 1{,}41,$
$a_4 = 1{,}4142... \approx 1{,}41,$
0,000015 %

b) $a_1 = \frac{33}{8} \approx 4{,}13,$
$a_2 = \frac{1217}{528} \approx 2{,}30,$
$a_3 = \frac{2038657}{1285152}... \approx 1{,}59,$
$a_4 = 1{,}4235... \approx 1{,}42,$
0,66 %

224 $n = 8$

225 a) 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
b) – c) –

8 Funktion analysoiminen

226 a) $f'(x) = 18x^5 - 10x + 1$
b) $f'(x) = 2345x^{2344} - 2\,000x^{999} + 2x^{31}$
c) $f'(x) = 2x + 10$

227 $f'(x) = x^2 + 3x - 4$

228 a) on b) ei

229 a) $t = 4$ b) –

230 a) $f'(x) = 6x - 4$
b) $f'(-1) = -10$
c) $x = \frac{2}{3}$ d) $x = 1$

231 a) $x = -1$ ja $x = 3$
b) $x \le -1$ tai $x \ge 3$
c) maksimikohta $x = -1$, maksimi $f(-1) = 2\frac{1}{2}$, minimikohta $x = 3$, minimi $f(3) = -8$

232 a) $x = -2,\ x = 0{,}5,\ x = 2{,}8$
b) $x = -1,\ x = 2$ c) 5 d) −5
e) $[-2, 1]$ ja $[2, 3]$ f) $[-1, 2]$

233 a) $x = -2,\ x = 4$
b) $x \le -2$ tai $x \ge 4$
c) $x \ge 1$

234 a) $x \le -6$ tai $x \ge 7$
b) minimikohta $x = -6$,
maksimikohta $x = 7$

235 $x = 0,\ x = 4$

236 $f'(1) = 4$

237 $f'(0) = 4$

238 $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

239 $x = 1,\ x = \frac{1}{3}$

240 a) $y = -3x + 4$
b) (0, 4) ja $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

241 pienin arvo −10, suurin arvo −1

242 $x \le \frac{1}{5}$

243 a) $f'(x) = x^2 - 4x$
b) $x = 0,\ x = 4$
c) $0 \le x \le 4$

244 Kasvava, kun $x \le -3$ tai $x \ge 3$.
Vähenevä, kun $-3 \le x \le 3$.

245 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

246 a) $x = 3,\ x = \pm 2$
b) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 4$
c) $x = -1 \pm \frac{\sqrt{84}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$

247 a) $f'(x) = = 4x + 1$
b) $x \le -\frac{1}{4}$ c) $y = 9x - 12$

248 Pallo käy 11,4 m:n korkeudella. Lentorata on laskeva aikavälillä 8 s – 16,7 s.

249 suurin arvo $\frac{1}{4}$, pienin arvo −30

250 suurin arvo 37, pienin arvo −15

251 Funktio saa arvoja väliltä $[-1, 9]$.

252 a) $x = 0,\ x = \frac{6 + \sqrt{180}}{8} \approx 2,43$,

$x = \frac{6 - \sqrt{180}}{8} \approx -0,93$

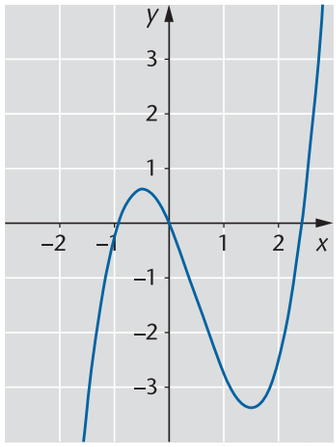
b) maksimikohta $x = -\frac{1}{2}$,

maksimi $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$,

minimikohta $x = \frac{3}{2}$, minimi

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$

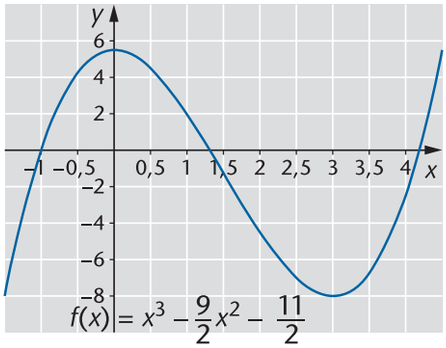
c)



$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x$

253 $-\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \sqrt{\frac{1}{3}}$

254 a) suurin arvo $\frac{11}{2}$, pienin arvo −8



$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{11}{2}$

b) suurin arvo 12,
pienin arvo $-\frac{27}{4}$

255 alan lauseke $4x^2 - x^3$,
suurin arvo $\frac{256}{27}$

256 suurin ala 48 m^2, julkisivun suuntainen sivu 8 m ja julkisivua vastaan kohtisuorat sivut 6 m

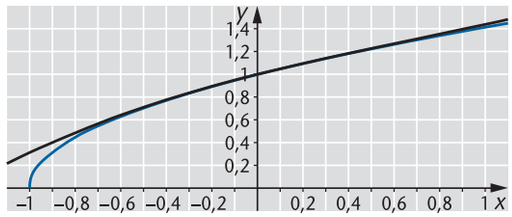
257 $\frac{169}{12}$

258 a) $a = \frac{1}{2}$ b) $b = -4$

259 $a = -\frac{16}{9},\ b = \frac{16}{3}$

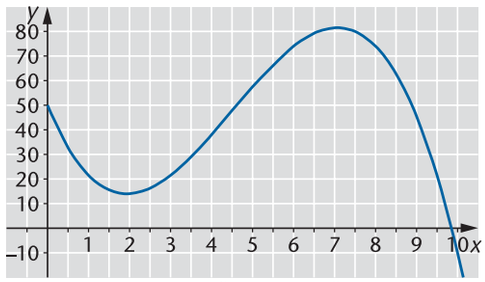
260 $a = -\frac{3}{4},\ b = \frac{9}{4},\ c = 0,\ d = -2$

261 $p'(0{,}5)$ on 3,34 % suurempi



262 ympyrän osuus 52,8 cm ja neliön osuus 67,2 cm

263 Funktion suurin arvo on 81,533, kun $x \approx 7{,}066$. Funktio kasvaa nopeimmin, kun $x = \frac{9}{2} = 4{,}5$.



$f(x) = -x^3 + 13{,}5x^2 - 41x + 50$

264 a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$ b) $y = \frac{10}{3}x - \frac{1}{27}$

9 Tasogeometria – monikulmiot

265 a) 8 b) 24

266 70° ja 82°

267 a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{6}$

b) $\tan\beta = \sqrt{\frac{5}{13}}$

268 50°, 30°, 100°

269 sivujen pituudet 5 ja 10, ala 30

270 $\sqrt{34}$

271 $A: \frac{1}{4}$, $B: \frac{1}{4}$, $C: \frac{1}{16}$, $D: \frac{1}{8}$, $E: \frac{1}{16}$, $F: \frac{1}{8}$, $G: \frac{1}{8}$

272 $\frac{27}{10}$

273 $A_{ACE} = \frac{75}{9} = 8\frac{1}{3}$

274 12 cm^2

275 3 ja 5

276 66° ja 24°

277 27,04° ja 62,96°

278 a) 4,42 m ja 7,29 m
b) 8,52 m

279 1,55 m

280 8 030 mm^2

281 7° ja 83°

282 20 cm^2 ja 105 cm^2

283 32°, 58°, 9,4 cm

284 4,3 m

285 1 477 m, 14 min 46 s

286 68°

287 Ala pienenee 4,0 %.

288 a) 26° b) 1 755 m^2

289 16 m

290 Suoraa reittiä lentävä lentokone on nopeampi.

291 Hypotenuusan pituus on 6,5 cm. Kärjen etäisyys hypotenuusasta on 2,8 cm.

292 36 m

293 1:28 300

294 184 m, 146 m, 112 m, 8 170 m^2

295 Liisa: 2 700 m, 7,9 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$
Pia: 3 200 m, 8,1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

296 a) 1,45 b) 47°, 29° ja 104°

297 11,5 m

298 15,5 cm

299 77 %

300 21 cm

301 18

10 Ympyrä

302 4π

303 $60 + 10\pi$

304 $\frac{\pi}{3}$

305 $\frac{\pi^2 r^2}{4}$

306 $r = \frac{10}{\pi + 2}$

307 $10\sqrt{\pi}$

308 $\frac{\pi}{4}$

309 a) $x = 2r$ b) $r\sqrt{3}$
c) $\frac{r^2\left(6\sqrt{3} - \pi\right)}{4}$

310 2,66 m^2

311 a) $\frac{1600}{81} \approx 19,8$ b) 0,6 %

312 29 s

313 350 km

314 62,8 km

315 5,5°

316 138 m

317 34 300 km

318 988 cm

319 12 cm^2

320 870 cm^2

321 22 min 27 s

322 32,5 m

323 27 km

324 21 cm

325 760 cm^2

326 2,04 cm^2

327 183 cm

328 a) 21,5 % b) 27,3 %

329 53,3 km, 7,42°

330 Monikulmion piiri on siis $24r \sin 15°$. Piin arvo saadaan kahden numeron tarkkuudella.

11 Avaruusgeometria

331 a) 7 m^3 pienempi
b) 18 m^2 pienempi

332 40 cm

333 a) 48 cm^3 b) 60 cm^2

334 3,2 l

335 a) 460 cm^3 b) 248 cm^2 c) 21 cm

336 6,20 m

337 143 cm^3

338 a) 87,5 % b) 75 %

339 a) 24 cm b) 108 % enemmän

340 15 m^2

341 a) 8,02 kg/dm^3 b) 9,8 cm

342 a) 487 cm^3 b) 3,8 cm

343 190 cm

344 67 %

345 on tyhjää tilaa

346 9,1 cm

347 18,8

348 tilavuus 334 cm^3,
vaipan ala 208 cm^2

349 0,42 mm

350 sivutahkon ala 60, kulma 43,3°

351 6,2 cm

352 37,5 %

353 tilavuus 4 000 cm^3, pohjan sivun pituus 20 cm, laatikon korkeus 10 cm

354 säde 6,2 cm, tilavuus 250 cm^3

355 tilavuus $\frac{32\pi}{3} \approx 33,51$

12 Tilastot

356 a) pienimmät 2007,
suurimmat 2012
b) vanhuus

357 a) n. 44 vuotta b) n. 36 vuotta
c) n. 51 vuotta d) 63 %
e) 40 %

358 a) muuttujan A b) muuttujan B

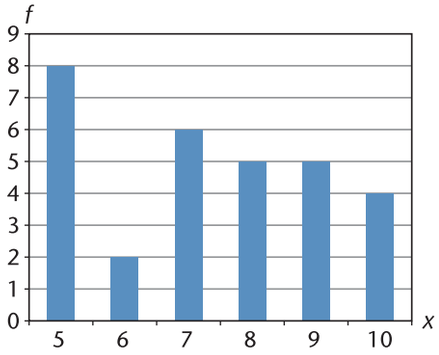
359 a) muuttujan B b) yhtä suuret

360 Md = 3, $\overline{x} = 4$

361 $a = -5$

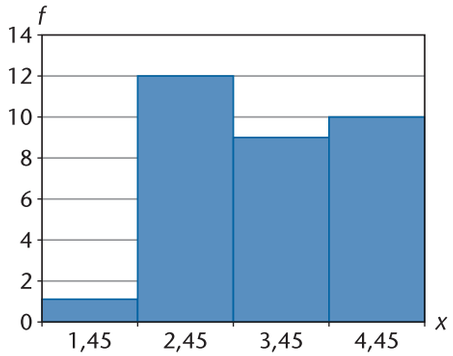
362 a) Mo = 5, Md = 7

b)



363 a) moodiluokka 2,0–2,9,
mediaaniluokka 3,0–3,9

b)



364

Muuttuja	*f*	*f* %	*sf*	*sf* %
1	8	32 %	8	32 %
2	5	20 %	13	52 %
3	9	36 %	22	88 %
4	3	12 %	25	100 %

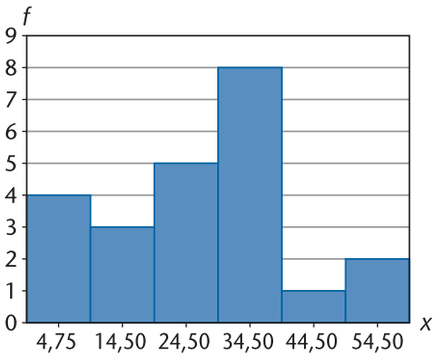
365 a) 3 b) 15 % c) 64 %
d) 291 e) 466 f) 79 %

366 25 bussia

367 a) 33 b) 30 % c) 70 %
d) 42 % e) 136–180 min

368 a) 166 sutta b) 36 sutta
c) yli 237 sutta

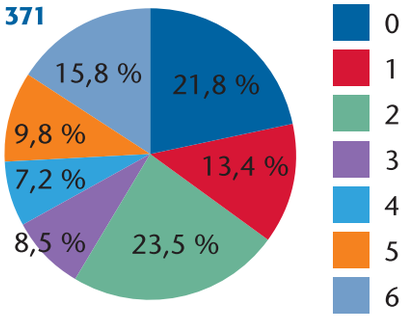
369 a)



b) $\bar{x} = 26{,}7$ s, Mo = 34,5 s,
Md = 24,5 s

370 a) $\bar{x} \approx 6{,}7$, $s \approx 0{,}75$
b) vähintään 9
c) ei
d) poikkeaa merkitsevästi

371



372 a) Niina b) 178,4 cm

373 185,3 cm

374 8,7

375 $\bar{x} \approx 3{,}10$, $s \approx 1{,}56$

13 Todennäköisyyslaskenta

376 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{11}{36}$

377 a) $\frac{13}{16}$ b) $\frac{5}{8}$

378 a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{11}{36}$

379 $\frac{2}{3}$

380 0,26

381 a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{4}$

382 $\frac{1}{16}$

383 a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}$

384 0,28

385 a) $7{,}6 \cdot 10^{-5}$ b) 0,44
c) 0,56

386 a) 0,029 b) 0,11

387 0,014

388 a) 0,028 b) 0,22

389 a) 0,833 b) 0,164
c) 0,003

390 a) 0,17 b) 0,10

391 a) 0,0017 b) 0,035

392 a) 0,43 b) 0,57

393 a) 0,6 b) $6 \cdot 10^{-9}$

394 a) 0,0024 b) 0,074

395 a) 336 viikkoa b) 9,65 €

396 16 777 216

397 $\frac{2n}{3}$

398 vähintään 16 henkilöä

399 a) Tapaturmaisen kuoleman
todennäköisyys on suurempi.
b) 3400

400 a) 0,064 ja 0,936 b) 0,718

401 0,522

402 0,916 ja 0,0842

403 $\frac{1}{3}$

404 0,048

405 0,44

406 3,04 g

407 0,055

408 170 %

409 *P*(”pituus korkeintaan 176 cm”)
= 0,95
P(”kaikki 3 alle 176 cm”) = 0,86
P(”ainakin yksi yli 176 cm”) = 0,14

Monivalintakysymykset

1 c	**2** b	**3** a	**4** c	**5** a
6 b	**7** b	**8** c	**9** b	**10** c
11 a	**12** c	**13** b	**14** c	**15** a
16 c	**17** a	**18** c	**19** a	**20** d
21 c	**22** c	**23** b	**24** c	**25** c
26 a	**27** b	**28** a	**29** b	**30** c
31 b	**32** a	**33** b	**34** a	**35** a
36 c	**37** a	**38** b	**39** b	**40** c
41 b	**42** b	**43** b	**44** a	**45** a
46 c	**47** b	**48** a	**49** b	**50** a
51 c	**52** a	**53** b	**54** c	**55** c
56 b	**57** a	**58** c	**59** a	**60** c
61 b	**62** c	**63** c	**64** a	**65** a
66 c	**67** c	**68** a	**69** b	**70** c
71 b	**72** b	**73** c	**74** b	**75** a
76 c	**77** c	**78** a	**79** b	**80** c
81 c	**82** b	**83** b	**84** b	**85** a
86 a	**87** c	**88** c	**89** c	**90** a
91 a	**92** a	**93** c	**94** b	**95** b
96 b	**97** c	**98** b	**99** c	**100** b

Harjoituskoe 1

1 a) $\frac{2}{3}$ b) $x = 0$ tai $x = 3$

c) $-2x^2 + 3x - 1$

2 a) $3n + 2$ b) 302

c) Luku on jonon 18. jäsen.

3 $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

4 a) $f'(0) = -3$ b) $x = 1$

c) minimikohta $x = 1$

d) $x > 1$ e) $-1 < x < 3$

f) 3

5 a) 9 900 € b) 4,5 miljardia euroa

6 a) $(0, -5)$ ja $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

7 a) $8{,}4 \cdot 10^{-5}$ b) 0,84

c) 0,32

8 a) 0,048

b) Paino poikkeaa merkitsevästi keskiarvosta.

9 20,2 km

10 24 116,87 €

11 a) 4,7 b) $K_a \approx 1{,}7 \cdot 10^{-4}$

12 9 050 m^3 ja 1 981 m^2

13 $a = 15$,

maksimi 16 kohdassa $x = -4$

Harjoituskoe 2

1 a) $x = 2$ b) $\frac{1}{4}$ c) (3, 0) ja (0, 6)

2 a) $x = 1$ b) $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$

c) $x = 6{,}0$ cm

3 a) $x = 0$, $x = 6$

b) $f'(-5) = -16$,

funktio on vähenevä

4 a) Mo = 0 b) Md = 1 c) $\bar{x} = \frac{3}{2}$

5 a) 22 % b) 88 % suurempi

6 a) 16,7 min b) 89,6 kg

7 a) (1, −3) ja (−5, 27)

b) $-5 < x < 1$ c) $x = -2$

8 $a = 667$ km b) 305 m

9 a) $y = 7x + 1$

b) suurin arvo $\frac{7}{6}$,

pienin arvo $-\frac{533}{6}$

10 a) 3003 b) 40

11 a) 38° b) 820 cm^3

12 a) $x = 2$, $x = -8$

b) $(-3, -25)$

13 2 insinööriä, 24 uudisasukasta

Hakemisto

A
alkuluku 12
aritmeettinen jono 78
aritmeettinen keskiarvo 148
aritmeettinen summa 78

D
derivaatta 91
differenssi 78
diskreetti muuttuja 146
diskriminantti 34

E
eksponentti 13
eksponenttifunktio 66
eksponenttiyhtälö 67
ensimmäisen asteen epäyhtälö 23
ensimmäisen asteen yhtälö 23
epäyhtälö 23
epäyhtälöryhmä 55
erilliset tapahtumat 163

F
frekvenssi 146

G
Gaussin käyrä 163
geometrinen jono 79
geometrinen summa 79
geometrinen todennäköisyys 162

H
halkaisija 121
histogrammi 147

I
identtinen yhtälö 23
itseisarvo 12

J
jakauma 146
jatkuva muuttuja 146
jatkuvan funktion ääriarvot 93
juuri 34
jänne 121
jäsen 78

K
kaari 121
kahden muuttujan epäyhtälö 55
kahden suoran leikkauspiste 44
kantaluku 13
kartio 133
kasvava funktio 92
kertolaskusääntö 163
kertoma 162
kertymäfunktio 163
keskiarvo 148
keskihajonta 148
keskuskulma 121
kk-lause 106
klassinen todennäköisyys 162
kolmion kulmien summa 107
kombinaatio 162
komplementti 163
kulkukaavio 92
kulma 106
kulmakerroin 43
kuutio 132
käänteinen verrannollisuus 24
käänteisluku 12

L
lauseke 14
lausekkeen sieventäminen 14
lg 67
lieriö 132
lineaarinen optimointi 56
ln 67
logaritmi 67
lukujono 78
luokittelu 146
luokkakeskus 146
luonnollinen logaritmi 67
lävistäjä 108

M
mahdoton tapahtuma 162
maksimi 93
maksimikohta 93
mediaani 148
meridiaani 134
merkkikaavio 92
minimi 93
minimikohta 93
mittakaava 106, 134
moodi 148
murtolauseke 14
murtolukujen jakolasku 12
murtolukujen kertolasku 12
murtolukujen yhteenlasku 12
muutosnopeus 91

N
nelikulmio 108
neliö 108
neliöjuuri 12
neljäkäs 108
nollakohta 35
normaali 43
normaalijakauma 163
normitettu arvo 148
normitettu normaalijakauma 163

O
osittelulaki 14
otoskeskihajonta 148

P
painotettu keskiarvo 148
pallo 134
pallopinta 134
paraabeli 34
paraabelin huippu 35
parillinen potenssifunktio 66
pariton potenssifunktio 66
pituuspiiri 134
porrasdiagrammi 147
potenssi 13
potenssien laskusäännöt 13
potenssifunktio 66
potenssiyhtälö 67

prosentti 13
prosenttikerroin 13
prosenttiyhtälö 24
pylväsdiagrammi 147
pyramidi 133
Pythagoraan lause 107

R
ratkaisukaava 34
riippumattomat tapahtumat 163
ristiinkertominen 24
ristikulma 106

S
samankantaiset potenssit 13
samankohtaiset kulmat 106
samannimiset murtoluvut 12
segmentti 121
sektori 121
sektoridiagrammi 147
sektorin ala 121
sijoitusmenetelmä 44
suhteellinen frekvenssi 146
suhteellinen summafrekvenssi 146
summafrekvenssi 146
suora kartio 133
suora lieriö 132
suora verrannollisuus 24
suorakulmainen kolmio 107
suorakulmainen särmiö 132
suorakulmio 108
suoran yhtälö 43
suorien leikkauspiste 44
suotuisa tapaus 162
suunnikas 108
suuntakulma 43
symmetrinen tapahtuma 162
säde 121, 134

T
tangentti 122
tangenttikulma 122
tasakylkinen kolmio 107
tasasivuinen kolmio 107
termi 78
toisen asteen epäyhtälö 35
toisen asteen polynomifunktio 34
toisen asteen yhtälö 34
trigonometriset funktiot 107
tuloperiaate 162

V
vaippa 132
varma tapahtuma 162
vastaluku 12
vastatapahtuma 163
verranto 24
vieruskulma 106
viivadiagrammi 147
vähenevä funktio 92

Y
yhdenmuotoisuus 106
yhteenlaskumenetelmä 44
yhtälöpari 44
yleinen jäsen 78
ympyrä 121
ympyräkartio 133
ympyrälieriö 132
ympyrän ala 121

Ä
ääriarvo 93
ääriarvokohta 93